



Universidad ECCI
Dirección de Ciencias Básicas
Programa de Estadística

**SIMULACIÓN NUMÉRICA PARA EL MODELO DE HESTON DE
VALORACIÓN DE OPCIONES USANDO ESQUEMAS TIPO RUNGE-KUTTA**

Trabajo de grado para optar al grado de Profesional en Estadística

MARLY JENNY LADINO
MIGUEL ANGEL CASTILLO
BOGOTÁ-COLOMBIA
2022

Director: Edgar Mauricio Munar Benitez
Dirección de Ciencias Básicas
Universidad ECCI, Bogotá

**Simulación Numérica para el modelo de Heston de valoración
de opciones usando esquemas tipo Runge-Kutta**

Marly Jenny Ladino
Miguel Angel Castillo

Director del Trabajo de Grado: Edgar Mauricio Munar Benitez, Universidad ECCI, Bogotá-Colombia.

Director de Programa: José Alexander Fuentes Montoya

JURADOS DE TESIS

.....

Bogotá-Colombia, Noviembre de 2022

Abstract

This degree project to present an research of type experimental that proposes the numerical solution of Heston's model of option valuation. Heston's model for the valuation of financial options, particularly european options, includes systems of stochastic differential equations that seek to predict the option price, that is, that price that must be paid in this type of financial derivatives. This class of models are very difficult to solve analytically, so computational simulations are required in the process of option price. Although there are some closed formulas for the Heston model, having numerical strategies allows us to consider more sophisticated models based on Heston and for these there are no such closed formulas.

For this purpose, a mathematical model is required that simulates the behavior of financial options under the Heston model of stochastic volatility. In this sense, the Heston model was considered as an alternative to the classic Black-Scholes-Merton model, since it more accurately reflects the real behavior of the market. According the assumptions of this Heston model, which is characterized by non-constant volatility and a correlation between the underlying asset and the volatility, is possible to get an approximation more accurate compared with the Black-Scholes-Merton model.

The line method is used as a numerical simulation strategy for solving the partial differential equation associated with the model. The Runge-Kutta schemes are mainly used for temporal variables while spatial variables are discretized using finite differences. Therefore, a system of ordinary differential equations is obtained, which is solved using the different Runge-Kutta type schemes. Several numerical tests are presented that show the correct functioning of the proposed schemes. All computational implementations were carried out in Matlab and own source code.

Resumen

Este trabajo de grado presenta una investigación de tipo experimental que plantea la solución numérica del modelo de Heston de valoración de opciones. El modelo de Heston para la valoración de opciones financieras, en particular, las opciones europeas comprende sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas que busca predecir el valor de la prima que se paga en este tipo de derivados financieros. Esta clase de modelos son muy difíciles de resolver de manera analítica, por lo que requieren simulaciones computacionales en el proceso del cálculo de la prima. Si bien existen algunas fórmulas cerradas para el modelo de Heston, el contar con estrategias numéricas permite considerar modelos mas sofisticados basados en Heston, y para los cuales no existen tales fórmulas cerradas.

Para este propósito, primero se requiere de un modelo matemático que simule el comportamiento de las opciones financieras bajo el modelo de Heston de volatilidad estocástica. En este sentido, se consideró el modelo de Heston como alternativa al modelo clásico de Black-Scholes-Merton ya que refleja de una manera más precisa el comportamiento real del mercado. Tomando en cuenta los supuestos de este modelo de Heston, el cual se caracteriza por tener volatilidad no constante y existir una correlación entre el activo subyacente y esta última, se puede concluir que la aproximación de la prima es más acertada que el moldeo Black-Scholes-Merton

La metodología basada se enmarca en el llamado método de líneas como estrategia de simulación numérica para la solución de la ecuacion diferencial parcial asociada al modelo. Se usan principalmente esquemas tipos Runge-Kutta para las variables temporales mientras que las variables espaciales son discretizadas usando las clasicas diferencias finitas. De esta manera, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que es resuelto usando los diversos esquemas tipo Runge-Kutta. Se presentan varios tests numéricos que muestran el buen funcionamiento de los esquemas numéricos planteados. Todas las implementaciones computacionales fueron realizadas en Matlab y con código fuente propio.

Agradecimientos

Al empezar esta carrera universitaria teníamos la expectativa de poder culminar con éxito todos nuestros objetivos, alcanzando cada uno de ellos con esfuerzo y dedicación al lado de personas que siempre estuvieron a nuestro lado para enseñarnos y así direccionarnos dando lo mejor de cada uno de ellos sintiendo su apoyo incondicional. Mi agradecimiento profundo a Dios quien me ha dado la sabiduría necesaria de guiarme, el aliento de vida y la dicha de entrelazar los destinos de los que hacemos parte; profesores y alumnos tal como la de un padre guía a un hijo. Sin ellos hubiera sido imposible haber hecho este proyecto de grado.

Índice general

Abstract	III
Resumen	IV
Agradecimientos	V
Contenidos	VI
Lista de Tablas	VIII
Lista de Figuras	IX
Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Conceptos básicos	3
2. Modelos matemáticos en la valoración de opciones	7
2.1. Conceptos básicos de finanzas	7
2.2. Opciones financieras	8
2.3. El modelo de Black-Scholes-Merton	11
2.4. El modelo de Heston de volatilidad estocástica	13
2.5. La EDP asociada al modelo de Heston	15
3. Métodos numéricos para la valoración de opciones	18
3.1. Métodos de árboles	18
3.2. Métodos monte carlo	19
3.3. Método de líneas	19

4. Esquemas tipo Runge-Kutta para el modelo de Heston	21
4.1. EDP con condiciones de frontera	21
4.2. Esquema numérico opciones tipo CALL	22
5. Experimentos Numéricos	27
5.1. Métodos Explícitos	27
5.2. Métodos Implícitos	28
5.3. Efecto del Tamaño de Paso	29
5.4. Efecto del Tiempo de Maduración	30
Conclusiones y Trabajos Futuros	31
Referencias	32

Índice de cuadros

5.1. Parámetros tests	27
5.2. Errores métodos explícitos.	28
5.3. Errores métodos implícitos.	29
5.4. Efecto del Tamaño de Paso	30

Índice de figuras

1.1. Proceso Estocástico.	4
2.1. Esquema Opción CALL. Fuente:[12]	10
2.2. Situaciones de la Opción CALL y PUT. Fuente:[15]	10
2.3. Sonrisa de la Volatilidad. Fuente:[5]	12
2.4. Distribución del log de los retornos de los activos para el índice SP&500. Fuente:[5]	13
2.5. Proceso de Reversión a la media. Fuente:[7]	14
5.1. Efecto del tiempo de maduración sobre la prima.	30

Introducción

En este trabajo de grado se estudian los conceptos teóricos básicos para entender la valoración de derivados financieros, en particular, las opciones europeas. A su vez, se establecen los aspectos relacionados con procesos estocásticos necesarios para entender los modelos matemáticos que los rigen. Se muestra la necesidad de un modelo matemático como el de Heston [8] para hallar el valor aproximado de la prima de una opción europea. Luego de realizar el respectivo análisis se describe como este modelo es adecuado, ya que sus supuestos buscan asemejarse a la realidad del movimiento del mercado.

El modelo de Heston expuesto en [8] es un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas cuya solución es bastante compleja. Depende de un método numérico que satisfaga o cumpla requisitos indispensables para dar una aproximación real al valor de una opción europea. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales y de frontera, las cuales pueden ser diversas, se trata de buscar el valor de la opción, la cual depende de diferentes variables, tales como el activo subyacente, el tiempo de maduración, la volatilidad y la correlación entre los procesos estocásticos involucrados. De esta manera, encontrar la solución a este tipo de modelos no es una tarea trivial.

En este sentido, el método de líneas, el cual se presenta como una combinación entre el método de diferencias finitas con el método de Runge-Kutta opta por ser una alternativa viable para el propósito de resolver el modelo de Heston. La estrategia se basa en dividir el problema en dos partes, primero se centra en discretizar las variables espaciales usando diferencias finitas centradas y luego la temporal, con el objetivo de llegar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Al tener este sistema de EDOs se usa el método Runge-Kutta, el cual es el más adecuado para resolverlo. Este trabajo de grado se distribuye tal como sigue.

En el **Capítulo 1** se dan los preliminares, ya que es de gran importancia entrar en contexto sobre el modelo de Heston, tomando en cuenta los conceptos básicos indispensables relacionados con el cálculo estocástico que serán utilizados durante el desarrollo de este trabajo. Algunos de los procesos estocásticos resaltados en este documento son: procesos de Markov, Martingala y el proceso de Wiener.

En el **Capítulo 2** es importante tener claro algunos conceptos básicos en finanzas para entender el comportamiento de los derivados financieros, requiriendo un modelo matemático que alcance aproximar el valor de la prima que se debe manejar en la valoración de opciones. Para ello es necesario entender cada modelo como el de Black-Scholes-Merton [2, 9] y el de Heston [13]. Se muestra como este último tiene mejor aplicación en esta aproximación ya que se hace útil manejar este tipo de herramienta facilitando el cálculo de la prima de una manera más acertada. Por tanto, en esta sección se realiza un enfoque teórico bastante minucioso entrando en contexto en cada uno de los modelos mencionados con sus supuestos, fórmulas y alcances.

En el **Capítulo 3** se nombran varios métodos haciendo énfasis en el método de líneas, ya que es el más apropiado para la resolución de este sistema al discretizar la variable temporal usando métodos tipos Runge-Kutta, y las variables espaciales se discretizaron por medio de diferencias finitas. Al separar las variables el sistema se hizo más fácil de resolver.

En el **Capítulo 4** se muestra el esquema numérico. Es necesario realizar cambios de variables en el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que permita organizar el modelo y así facilitar su manejo, teniendo en cuenta las condiciones fronteras necesarias en el esquema numérico. Partiendo el dominio en nodos interiores para las variables espaciales para así formar una malla bajo las condiciones de frontera y aplicar diferencia finitas centradas y fijando la variable temporal se obtienen formulaciones tipo Runge-Kutta.

Finalmente, en el **Capítulo 5** se implementa computacionalmente el esquema numérico y se muestran algunos resultados numéricos que buscan mostrar el buen funcionamiento del esquema planteado.

Planteamiento del problema

En la literatura financiera existen diversos métodos que se acercan a la solución y a nivel nacional existe la comprobación y/o réplica de estos, pero es bien sabido que la innovación es el as bajo la manga que nos permite llegar a nuevas alternativas. Por ende es urgente iniciar con nuevos modelos matemáticas a través de nuevas alternativas computacionales que den soporte a futuras investigaciones en el campo financiero. Con el uso de herramientas computacionales y matemáticas que facilitan la solución de problemas tan complejos como lo es el valor adecuado o más acertado de la prima de una opción. A través de simulaciones numéricas para acercar el valor exacto de la prima de una opción utilizando el modelo de Heston mediante esquemas tipo Runge-Kutta nos dan el soporte necesario para futuras investigaciones en el marco literario.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En esta sección introduciremos algunos conceptos básicos del cálculo estocástico y sus aplicaciones a finanzas. Los teoremas y resultados de esta sección serán usados a través de este documento. En su mayoría, los conceptos fueron extraídos de [10] y [13].

1.1. Conceptos básicos

Desde el punto de vista matemático el lenguaje natural para entender los derivados financieros, en particular, las opciones financieras, son los procesos estocásticos. Por tanto, partamos de la siguiente definición

Definición 1.1. *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T , llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados.*

De acuerdo a la definición 1.1, el espacio parametral podría ser un conjunto discreto $T = 0, 1, 2, \dots$ donde estos números se interpretan como tiempos. En este caso, se dice que el proceso es a tiempo discreto, y por tanto el proceso estocástico respectivo se denota por $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$. Así, para cada n se tiene que X_n es el valor del proceso o estado del sistema al tiempo n . También, el espacio parametral puede ser un conjunto continuo $T = [0, \infty)$. En este caso, se dice que el proceso estocástico es a tiempo continuo, denotándose por $\{X_t : t \geq 0\}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, un proceso estocástico puede considerarse como una función de dos variables $X : T \times \Omega \rightarrow S$ de tal manera que al par (t, ω) se le asocia el valor o estado $X(t, \omega)$. A cada ω del espacio muestral le corresponde una trayectoria del proceso. Si A es un conjunto de estados, el evento $X_n \in A$ corresponde a la situación en donde al tiempo n el proceso toma algún valor dentro del conjunto A . En particular, $(X_n = x)$ es el evento en donde al tiempo n el proceso se encuentra en el estado x .

Los diferentes tipos de procesos estocásticos se obtienen al considerar las distintas posibilidades para el espacio parametral, el espacio de estados, las características de las trayectorias, y principalmente las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias que conforman el proceso. Algunos ejemplos

de procesos estocásticos son: procesos de ensayos independientes, procesos de Markov, procesos con incrementos independientes, procesos estacionarios, martingalas, procesos Gaussianos, etc...La siguiente figura ilustra el concepto de proceso estocástico.



Figura 1.1: Proceso Estocástico.

La herramienta matemática que nos ayuda a describir el comportamiento de un proceso estocástico hasta cierto tiempo T es el de filtración, la cual puede entenderse como una sucesión ordenada de sub σ -álgebras. De manera formal se tiene: $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n\}$ de \mathcal{F} tal que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$

Otro concepto importante es el de los procesos Markov, los cuales fueron introducidas por el matemático ruso Andrey Markov, quien pretendía crear un modelo probabilístico que analizara la frecuencia con que aparecen las vocales en un poema y textos literarios. De manera más precisa tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2. *Un proceso de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto $p(x_{n+1} : n = 0, 1, \dots)$, con espacio de estado discreto satisfaciendo la propiedad de que las observaciones futuras sólo dependen del presente y no del pasado, esto es, para cualquier entero de $n \geq 0$ y para cualquier conjunto de estados x_0, \dots, x_{n+1} se cumple:*

$$p(x_{n+1}|x_0, \dots, x_n) = p(x_{n+1}|x_n)$$

Definición 1.3. *Una martingala es un proceso estocástico a tiempo discreto $X_n : n \geq 1$ respecto a una filtración \mathcal{F}_n si cumple las siguientes tres condiciones:*

1. *Es integrable.*
2. *Es adaptado a la filtración.*
3. *Para cualesquiera $n \leq m$, se cumple que $E(X_m|\mathcal{F}_n) = X_n$*

De una forma más general, podemos decir que es un proceso cuyo valor promedio del proceso al tiempo $n + 1$ es el mismo, a esto lo llamamos como "proceso de juegos justos", o sea, que en promedio el jugador no pierde ni gana en cada apuesta.

Definición 1.4. *Un proceso de Wiener $W = W(t)$, definido para $-\infty < t < \infty$, es un proceso estocástico que satisface las siguientes propiedades:*

1. $W(0) = 0$
2. $W(t) - W(s)$ tiene una distribución normal con media 0 y varianza $\sigma^2(t-s)$, donde σ es una constante positiva, para todo $s \leq t$. Es decir, el proceso tiene distribución normal $N(0, \sigma^2(t-s))$
3. $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2) \dots W(t_n) - W(t_{n-1})$ son independientes, para $t_1 \leq t_2 \leq \dots t_{n-1} \leq t_n$.
4. Las trayectorias de W son continuas.

Cuando vemos los movimientos aleatorios sin ningún orden aparente en la naturaleza con desplazamientos independientes e intervalos de tiempos disyuntos. A este fenómeno físico se le llama "Movimiento Browniano" y al modelo matemático Como "Proceso de Wiener" en algunas fuentes literarias es común llamarlas a las dos como igual.

En esta definición [14] fue propuesto por Ornstein y Uhlenbeck en (1930) "para modelar la velocidad del movimiento difuso de una partícula en intervalos de tiempo pequeños. Luego de un choque, una partícula no se detiene después de cambiar de posición, moviéndose de forma continua a medida que pierde velocidad. A diferencia de un simple movimiento browniano, el modelo Ornstein-Uhlenbeck es capaz de capturar esta pérdida de velocidad. Por lo que se trata de un proceso estocástico que, describe la velocidad de una partícula browniana bajo la influencia de una fricción. El modelo es estacionario, Gaussiano y de Markov, siendo el único que satisface estas tres condiciones, lo que permite las transformaciones lineales de las variables en espacio y tiempo. Con el tiempo, tiende a inclinarse hacia su media de largo plazo, como un proceso de reversión a la media. Puede ser considerado como una modificación de un recorrido aleatorio en tiempo continuo, o proceso de Wiener, donde las propiedades del proceso han sido cambiadas; de modo que hay una tendencia por la que el recorrido se mueve hacia una posición central, con una mayor atracción cuando el proceso está más lejos del centro."

Definición 1.5. Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación de la forma

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

definida para valores de t en un intervalo $[0, T]$, y con condición inicial la variable aleatoria X_0 que se asume F_0 medible e independiente del movimiento Browniano.

De acuerdo a la definición 1.5 La incógnita de esta ecuación es el proceso X_t . Los coeficientes $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ son funciones reales definidas sobre $[0, T] * R$ y se conocen como los coeficientes de tendencia y de difusión respectivamente. Esta ecuación diferencial se interpreta como la ecuación integral:

$$X_t = X_0 + \int_{x=0}^t b(s, X_s)ds + \int_{x=0}^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

En donde la primera es una integral de Riemann mientras que la segunda es una integral estocástica de Itô. El proceso solución puede interpretarse como el estado de un sistema que evoluciona de manera determinista gobernado por la parte no aleatoria de la ecuación pero perturbado por un ruido aditivo dado por la integral estocástica. Para que esta ecuación tenga alguna solución se deben imponer condiciones en los coeficientes.

Existen teoremas básicos de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas que establecen condiciones de regularidad para los coeficientes b y σ , bajo las cuales tiene solución única.

CAPÍTULO 2

Modelos matemáticos en la valoración de opciones

La teoría de valoración de opciones es una parte de la economía encargada del estudio de este tipo de derivados financieros. Para entender todos los detalles técnicos que involucran estos instrumentos financieros se hace necesario contar con un modelo matemático. En este capítulo presentaremos los conceptos básicos necesarios para entender como usando modelos matemáticos se puede establecer el precio de la prima de la opción.

2.1. Conceptos básicos de finanzas

En esta sección introduciremos algunos conceptos básicos de finanzas, los cuales son fundamentales para entender la teoría de valoración de derivados financieros. Esta teoría tiene como finalidad ayudar a la toma de decisiones, en relación a la valuación de estos derivados, en particular, de las opciones financieras. La siguiente información está basada en [4].

- **Activo:** Es cualquier valor negociable, es decir, que se puede comprar y vender, en forma de préstamo ó de participación en una sociedad financiera, y que dá derecho a una inversión o una participación en el capital de una empresa.
- **Activo subyacente:** En finanzas existen productos que no son activos por sí mismos, sino que dependen de la cotización, evolución y precio de otro activo concreto. Este activo se denomina activo subyacente. Por lo tanto, sobre él recaen contratos financieros. Entre los activos subyacentes más representativos tenemos por ejemplo: materias primas, índices, valores de renta fija y renta variable, tipos de interés, etc.
- **Derivado:** Es un producto o instrumento financiero cuyo valor se basa en el precio de un activo subyacente. Entre los más comunes tenemos las acciones, futuros, opciones, swaps y forwards. El comprador acepta adquirir el derivado en una fecha y precio específico. A menudo se utilizan para la cobertura de riesgos en las operaciones de la empresa.
- **Opción:** Es un derivado financiero que se establece por medio de un contrato en el cual se dá la compra o venta de un activo subyacente. Dicho contrato le da a su comprador el derecho, pero

no la obligación, a comprar o vender el activo subyacente a un precio determinado (Strike), en una fecha concreta (Fecha de vencimiento).

- **Volatilidad:** Es el cambio de tendencia o variabilidad de algo respecto a su media en un cierto período concreto. En el ámbito financiero está centrada en el precio de los activos, acciones, índices bursátiles, etc. La volatilidad depende de muchos factores, como el riesgo de crédito, riesgo de mercado, riesgo de liquidez, riesgos internos como la solvencia ó riesgos externos como la incertidumbre política y económica.
- **Tasa de interés:** Es el porcentaje al que está invertido un capital en una unidad de tiempo, es decir, es el precio del uso del dinero que representa un balance entre gastos administrativos y el riesgo asumido, como la inflación, que es el aumento generalizado de los bienes y servicios de un país, o la falta de pago de todo o parte del préstamo.
- **Tasa de interés libre de riesgo:** Es un concepto teórico que asume que en la economía existe una alternativa de inversión que no tiene riesgo para el inversionista.

2.2. Opciones financieras

Como ya se especificó con anterioridad, las opciones financieras son una especie de contrato firmado por dos partes, un comprador y un vendedor, el cual puede estar regulado o no por una entidad. En las opciones financieras se puede obtener ganancias acertando con las previsiones acerca de las tendencias futuras del mercado. Según los especialistas, los momentos de mayor volatilidad de los mercados son aquellos en los que más podemos ganar o perder con las opciones. En ocasiones minimizan de manera eficaz el riesgo relacionado con las variaciones de tipo de cambio de divisas que puede afectar a una actividad económica en particular. Las razones principales por las que un inversor utiliza opciones son por especulación y para cobertura. De manera más precisa:

Especulación: Si un inversor cree que un producto dado va a subir de precio, puede adquirir algunas participaciones de dicho producto o una opción de compra. Si no se equivoca y el precio sube, consigue un beneficio. Por el contrario, si no acierta en su predicción, es posible que pierda dinero. Este inversor está especulando. Por otro lado, si el inversor cree que el precio del activo va a caer, puede vender participaciones o comprar una opción de venta.

Cobertura: Un portafolio que contiene solo activos, cae cuando el precio del activo cae, mientras que otro que solo contiene opciones de venta sube. En algún lugar entre estos dos extremos existe un punto en el cual se está libre de riesgo. La reducción de riesgo por tomar estas posiciones entre el activo y la opción, es llamada cobertura.

Este trabajo está enfocado en las opciones financieras y como podemos valorarlas, es decir, como podemos darle un valor a la prima que se paga por el contrato de la opción. Dependiendo cuando se ejerza la compra o venta al que dá derecho el contrato en el mercado financiero podemos encontrar varios tipos de opciones, entre las más conocidas podemos mencionar [4].

- **Opción Asiática:** También conocidas como opciones Promedio, pertenecen a las opciones dependientes de su trayectoria, es decir, el valor de la opción al vencimiento no solo depende del

valor que alcance el activo subyacente al vencimiento, sino también de la evolución que tenga éste durante la vigencia del contrato.

- **Opción Europea:** Es un contrato en el que el comprador de la opción puede ejercer el derecho de comprar o vender el bien subyacente únicamente en la fecha de vencimiento establecida al inicio del contrato.
- **Opción Americana:** Es un contrato en el que el comprador de la opción, puede ejercer el derecho de comprar o vender el activo subyacente antes y en el vencimiento establecido al inicio del contrato.

Ahora bien, según el tipo de contrato, ya sea de compra o venta, podemos distinguir dos tipos de opciones:

- **Opción de compra (CALL Option):** Una opción tipo CALL otorga al comprador de ésta el derecho de comprar el activo subyacente S , pero no la obligación, a un cierto precio de ejercicio preestablecido K , en un tiempo a futuro predeterminado T . Una opción CALL sólo podría tener valor si el precio de mercado al ejercer la opción es superior al precio de ejercicio de la misma.
- **Opción de venta (PUT Option):** Una opción tipo PUT otorga al comprador de ésta el derecho de vender el activo subyacente S , más no la obligación, a un cierto precio de ejercicio preestablecido K , en un tiempo a futuro predeterminado T . Una opción PUT sólo podría tener valor si el precio de mercado al ejercer la opción es inferior al precio de ejercicio de la misma.

El precio pactado K es el llamado **Strike**, y el tiempo predeterminado T se conoce como **Tiempo de maduración**. Para el caso de una opción europea tanto el valor C de la opción CALL y el valor P de una opción PUT, en la fecha de vencimiento, dependen del precio de ejercicio K y el valor del activo subyacente S en el instante T . De esta manera, para la opción CALL se tiene que

$$C(S, K) = \text{máx}\{S - K, 0\}.$$

Por tanto, para el caso en que $S < K$, la opción es muy probable que se se ejerza y así el activo comprado en un valor K , puede venderse inmediatamente en el mercado a un precio S , obteniendo una ganancia de $S - K$. En el caso en que $S \leq K$, simplemente la opción no es ejercida y su valor es cero. Por otro lado, para la opción PUT se sigue que

$$P(S, K) = \text{máx}\{K - S, 0\},$$

de donde se concluye que si se tiene que $S > K$, la opción es muy probable que se ejerza y de esta manera el activo vendido a un valor K puede comprarse inmediatamente en el mercado a un precio S , obteniendo una ganancia de $K - S$. Si se dá el caso de que $K \leq S$, la opción no es ejercida y así su valor es cero. De esta manera, podemos decir que una persona adquiere una opción de compra con el fin de obtener beneficio cuando el precio del activo subyacente aumente, mientras que se adquiere una opción de venta para sacar beneficio si el precio del activo subyacente cae.

Las anteriores observaciones están hechas desde el punto de vista del comprador de la opción, por tanto, veamos ahora que busca el vendedor de una opción. Para el caso de una opción de compra el

vendedor de la opción está obligado a vender el activo subyacente en caso de que el comprador ejerza su derecho a la compra, mientras que en el caso de una opción de venta el vendedor de la opción está obligado a comprar el activo subyacente si el comprador ejerce su derecho a la venta. En ambos casos el vendedor de la opción tasa una **Prima** en el contrato. Es decir, pone un precio al contrato ya sea de compra o venta. Esta prima busca cubrir el riesgo de pérdida en el negocio. Si el comprador de la opción no ejerce su derecho el vendedor se ha visto beneficiado con la prima. El precio de la prima depende del mercado, pero básicamente, está influenciado por el valor del activo subyacente, el precio de strike, la tasa de interés, si el activo paga o no dividendos, el tiempo de maduración, y la volatilidad de los precios del activo. En la siguiente figura se puede observar el esquema con una opción de compra CALL.



Figura 2.1: Esquema Opción CALL. Fuente:[12]

Adicionalmente, el mercado nos puede presentar cuatro distintas situaciones en las que se pueden encontrar las opciones CALL Y PUT, reflejando el beneficio o pérdida frente a la variación del precio del activo subyacente en el mercado. La figura 2.3 nos ilustra estos hechos.

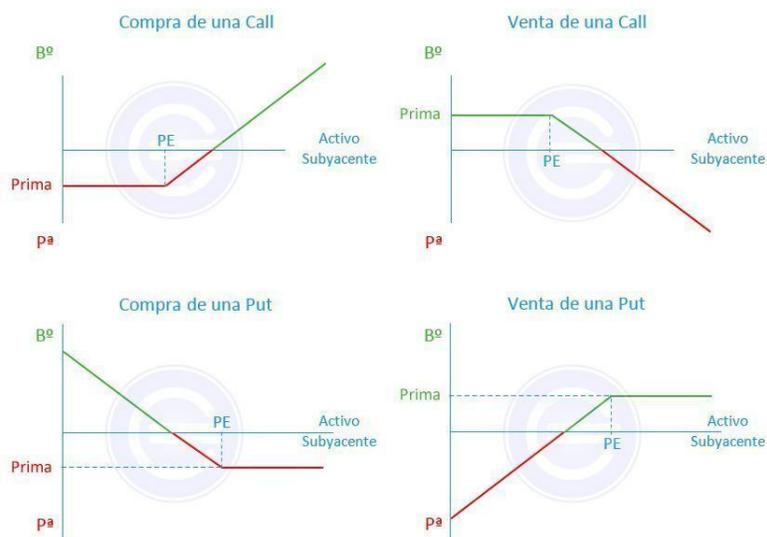


Figura 2.2: Situaciones de la Opción CALL y PUT. Fuente:[15]

Tal como observamos en la anterior figura, el valor de la prima juega un papel importante en el contrato que se firma entre comprador y vendedor, y su precio está determinado por unas variables del mercado. En la práctica, esta prima es tasada por ley de oferta y demanda, sin embargo, existen algunos modelos matemáticos que permiten calcular dicha prima bajo ciertas consideraciones y supuestos. En las siguientes secciones estos modelos serán presentados.

En el mercado se manejan los términos **ATM** (*at the money*) para referirse a una opción donde el precio de strike es muy parecido al precio del activo en el momento del vencimiento. Una opción **ITM** (*in the money*) es aquella en donde se tiene una alta probabilidad de ejercicio, y una **OTM** (*at the money*) es cuando la probabilidad de ser ejercida es muy baja. Finalmente, el valor de las opciones europeas tipo CALL y PUT están relacionados por lo que se conoce la paridad CALL-PUT, lo que se reduce a que sobre los mismos parámetros de precio inicial del activo S_0 , precio de strike K , tasa de interés libre de riesgo r y tiempo de maduración T , se cumple que

$$C(S, T) = P(S, T) + S_0 - Ke^{rT}$$

2.3. El modelo de Black-Scholes-Merton

El cálculo estocástico permitió desarrollar el campo de la valoración de opciones financieras, el cual tuvo su mayor auge en universidades, centros de investigación, y en especial en el entorno de los brokers y grandes sociedades de inversionistas que se interesaron en los detalles del movimiento Browniano y el cálculo diferencial estocástico de Ito. Las teorías matemáticas alrededor de las finanzas toman su forma con los trabajos de Black-Scholes en [2] y Merton en [9]. A partir de estos, el desarrollo de nuevos modelos matemáticos han venido surgiendo, entre ellos aquellos relacionados con la valoración de productos financieros. En esta sección introduciremos el modelo de valoración de opciones europeas bajo el enfoque propuesto por Black-Scholes-Merton (BSM). Para este fin, el modelo BSM plantea una serie de hipótesis que configuran un escenario ideal, es decir, un mercado perfecto [4], las cuales están dadas de la siguiente manera:

- La tasa de interés libre de riesgo r y la volatilidad σ del activo subyacente se suponen constantes durante el tiempo que dura la opción.
- El precio del activo subyacente sigue un proceso estocástico de media μ y desviación típica σ .

$$ds_t = \mu s_t dt + \sigma s_t dW_t$$

donde W_t es un proceso de Wiener, μ es el llamado *drift* del activo y representa el monto esperado del retorno del activo.

- No hay costes de transacción asociados a la cobertura.
- El activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción, entendiéndose por dividendo como la parte de los beneficios (o reservas) que una sociedad reparte entre sus accionistas en un momento determinado, como retribución al capital que han aportado a la empresa.
- No hay posibilidad de arbitraje. La ausencia de arbitraje significa que todos los activos libres de riesgo deben tener la misma rentabilidad.

- Los activos se pueden transar, es decir, la compra y venta del activo puede tener lugar continuamente.
- El mercado es completo, es decir, bajo el supuesto de no arbitraje con beneficios, se dice que los precios constituyen un mercado sin arbitraje generando un equilibrio económico general, estando formado por un activo libre de riesgo, es decir, que al no haber diferencia de precios del activo financiero se reduce la exposición del portafolio frente a la volatilidad del mercado en general, tomando posiciones que tengan el impacto neto de reducir los riesgos.

Uno de los supuestos implícitos dentro del modelo BSM es el hecho de que el logaritmo de los precios de los activos posee una distribución normal. De manera más precisa, se dice que

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma\right)t, \sigma^2 t\right), \quad t \geq 0$$

Hay tres aspectos por los cuales el modelo BSM no se adapta del todo al comportamiento del mercado. El primero está relacionado con el supuesto de volatilidad constante, el segundo con el ya mencionado ajuste log-normal del precio de los activos y por último el llamado efecto promedio y de clustering observado en el mercado.

Dado que el mercado es quien impone el valor de una opción, en este proceso se tiene involucrada la llamada **volatilidad implícita**, que no es más que el valor del parámetro σ que debe ser incorporado en el modelo BSM para que éste dé el valor correcto de la opción. En la práctica la volatilidad implícita depende del valor del strike, causando un comportamiento simétrico de la volatilidad implícita, y que se conoce comunmente como la sonrisa de la volatilidad. La siguiente figura ilustra este hecho.

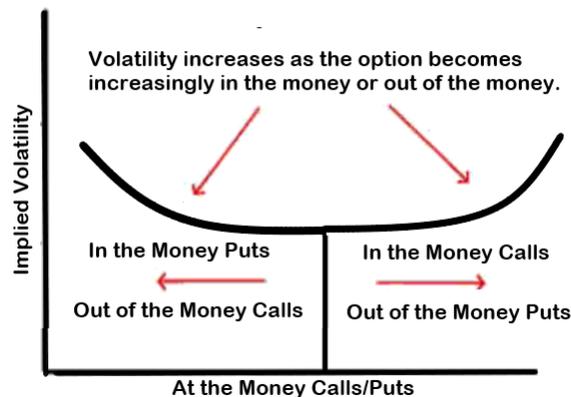


Figura 2.3: Sonrisa de la Volatilidad. Fuente:[5]

La volatilidad implícita para opciones OTM e ITM son más altas que para las ATM. Esto evidencia como el modelo BSM no captura el verdadero comportamiento del mercado.

En relación al supuesto de la normalidad de los logaritmos del precio de los activos, se puede decir, que en la práctica se tiene una distribución con picos más altos y colas más anchas comparados con los de una distribución normal. Este aspecto infiere que realmente el logaritmo de los activos no se

distribuyen normal. Aquí juegan un papel importante los conceptos de asimetría y curtosis. La siguiente figura ilustra la distribución log de los retornos de los activos del índice SP&500 durante 77 años.

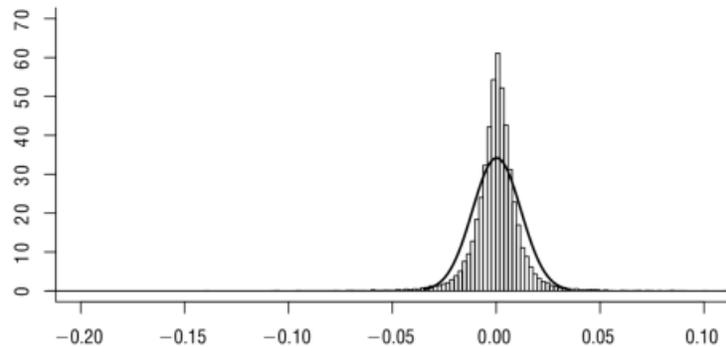


Figura 2.4: Distribución del log de los retornos de los activos para el índice SP&500. Fuente:[5]

Finalmente, el **efecto promedio** es la correlación negativa entre el precio del activo y la volatilidad, lo cual significa que caídas bruscas en el precio del activo conllevan a incrementos de la volatilidad, y viceversa. El **efecto clustering** está asociado con el hecho de que grandes movimientos del mercado implican movimientos en los precios, y viceversa. Es claro que un modelo con volatilidades constantes no logra capturar ninguno de los aspectos mencionados. Para más detalles de las limitaciones del modelo BSM se pueden consultar los trabajos consignados en [5, 1].

2.4. El modelo de Heston de volatilidad estocástica

La inclinación de la distribución del logaritmo de los precios, presente en algunos mercados, no es correctamente modelada si no se incluye un factor de correlación entre el proceso de la varianza y el proceso mismo del activo. El modelo de precios BSM supone implícitamente que la distribución de precios es log-normal, tal suposición es inconsistente con los datos reales del mercado [5].

En respuesta a lo anterior, desde finales de los años ochenta, se han llevado a cabo diversos intentos por crear un modelo de precios que se ajuste al comportamiento real del mercado, y para este propósito se han desarrollado diferentes estrategias para valorar derivados financieros. Se ha descartado la suposición de un comportamiento constante o determinístico de la volatilidad del activo, y por tanto se ha propuesto que la varianza se comporte de manera estocástica introduciendo un proceso reversivo para el comportamiento de ésta, que es más acorde al comportamiento real del mercado ofreciendo una alternativa al modelo BSM para valoración de opciones.

A comienzos de los 90', Steven Heston en [8] propuso un modelo de precios análogo al modelo de Black-Scholes, pero con volatilidad estocástica, siguiendo ésta un proceso tipo Ornstein-Uhlenbeck con reversión a la media, teniendo en cuenta la correlación entre el activo subyacente y su varianza instantánea. Además, logra dar una fórmula semicerrada para la valoración de una Opción Europea. Bajo estos supuestos el modelo de Heston se caracteriza por los siguientes aspectos [5]:

- Genera curvas de volatilidad que se asemejan a las curvas que se observan en el mercado.

- Se puede calibrar a cualquier curva de volatilidad que se presenta en el mercado.
- Facilita valorar opciones en donde no hay liquidez, con precios que se adecuen a entornos más realistas.

La siguiente figura nos ilustra el proceso de reversión a la media.

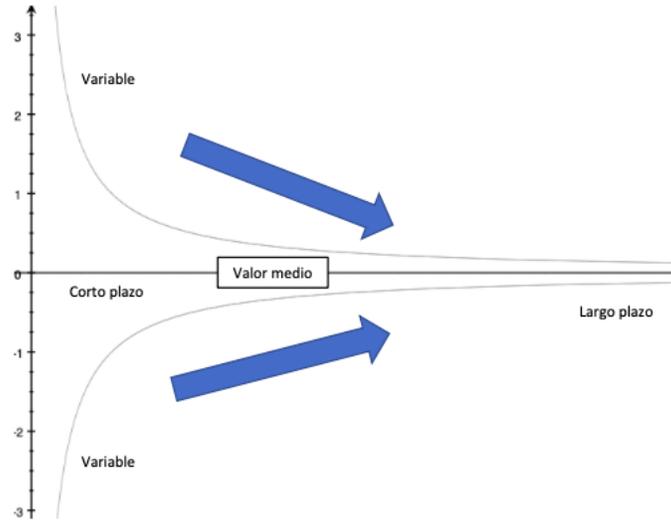


Figura 2.5: Proceso de Reversión a la media. Fuente:[7]

Este modelo se basa en un sistema de dos ecuaciones diferenciales estocásticas acopladas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 ds_t &= \mu s_t dt + s_t \sqrt{v_t} dW_t^s \\
 dv_t &= k(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v \\
 dW_t^s dW_t^v &= \rho dt
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dónde dW_t^s, dW_t^v , son movimientos Brownianos de 2 dimensiones, $\rho \in (-1, 1)$, μ es el drift, v_t es la varianza de los retornos del activo y $\sqrt{v_t}$ la volatilidad del precio del activo en el tiempo t . El parámetro σ , conocido como la volatilidad de la volatilidad, es una medida de la influencia estocástica sobre el proceso de la varianza, de manera similar al papel que juega la volatilidad misma sobre el proceso del precio. Se puede ver que además, tomando $\sigma = 0$ el modelo de Heston colapsa al modelo clásico de BSM con volatilidad determinística.

El componente determinístico del proceso de la varianza, $k(\theta - v_t)$, implica que este es atraído en cualquier instante a un valor medio θ fijo, con una velocidad k que converge a su media a largo plazo, por lo tanto, se denomina reversión a la media de la volatilidad. El proceso de la varianza $\sqrt{v_t}$ se deduce del modelo estocástico de las tasas de interés introducido por los autores Cox, Ingersoll y Ross con el modelo de CIR [3]. El proceso de la varianza instantánea está correlacionado con el precio del activo con un índice de correlación ρdt , como se evidencia en la última ecuación; siendo una característica importante para modelar algunas situaciones del mercado real, específicamente el efecto de apalancamiento, que consiste en una correlación negativa. Por lo tanto, el modelo de Heston integra

procesos de precios y de inclusión de la volatilidad, bajo el supuesto de que su comportamiento no tiene tendencia negativa con reversión a la media. Siendo éste de los primeros modelos en introducir al mercado la explicación del fenómeno de la curva sonrisa [figura 2.3], tomando como característica principal en el modelo la presentación de una fórmula semicerrada para el precio con el supuesto de una correlación entre el precio del activo y la volatilidad presente [5].

2.5. La EDP asociada al modelo de Heston

El modelo de Heston propuesto en (2.1) establece que el valor de los retornos de un activo, s_t en el tiempo t , sigue un proceso estocástico de tipo BSM con varianza estocástica, v_t en el tiempo t , ajustada a un proceso de tipo Ornstein-Uhlenbeck con reversión a la media. Tal como se presenta el modelo (2.1) es un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas. Sin embargo, con el fin de abordar este modelo desde un punta de visto determinístico podemos establecer el siguiente análisis que nos permite asociar una ecuación diferencial parcial (EDP) al sistema estocástico. Para tal fin nosotros usaremos el enfoque dado por [13], por tanto consideremos en primer lugar un resultado premilinar.

Lema 2.1. *Para el modelo de Heston (2.1) se cumple que*

$$\begin{aligned} ds_t ds_t &= v_t s_t^2 dt, \\ dv_t dv_t &= \sigma^2 v_t dt, \\ dv_t ds_t &= \sigma \rho v_t s_t dt. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Demostración. Mediante el uso de las ecuaciones que involucran el modelo (2.1) y las tablas de Ito se tiene que

$$\begin{aligned} ds_t ds_t &= (\mu s_t dt + s_t \sqrt{v_t} dW_t^s)^2 \\ &= \mu^2 s_t^2 dt dt + 2\mu \sqrt{v_t} s_t^2 dt dW_t^s + v_t s_t^2 dW_t^s dW_t^s \\ &= v_t s_t^2 dt, \\ dv_t dv_t &= (\kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v)^2 \\ &= \kappa^2(\theta - v_t)^2 dt dt + 2\kappa\sigma(\theta - v_t) \sqrt{v_t} dt dW_t^v + \sigma^2 v_t dW_t^v dW_t^v \\ &= \sigma^2 v_t dt, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} dv_t ds_t &= (\kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v)(\mu s_t dt + s_t \sqrt{v_t} dW_t^s) \\ &= \mu\kappa(\theta - v_t) s_t dt dt + \mu\sigma \sqrt{v_t} s_t dt dW_t^v + \kappa(\theta - v_t) \sqrt{v_t} s_t dt dW_t^s + \sigma v_t s_t dW_t^s dW_t^v \\ &= \sigma \rho v_t s_t dt. \end{aligned}$$

lo que completa la prueba. \square

Debido a que el par de procesos (s_t, v_t) son la solución del sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas (2.1) se sigue que (s_t, v_t) es un proceso de Markov 2-dimensional. Si usamos el sistema (2.1) para

generar los procesos s_t y v_t con valores iniciales $s(0) = s_0$ y $v(0) = v_0$, entonces el pay off de la opción europea sujeta al activo s con volatilidad v está dada por $V(T) = g(s(T), v(T))$. Teniendo en cuenta la formula de valoración de riesgo neutral dada en [13, 5.2.31] tenemos que el valor de dicha opción en un tiempo t antes del periodo de expiración está dada por

$$V(t) = \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} g(s(T), v(T)) | \mathcal{F}(t) \right]. \quad (2.3)$$

Teorema 2.1. *Dado el modelo de Heston (2.1) el valor del precio de la opción asociada es la solución de la EDP dada por*

$$\frac{\partial U}{\partial t} + rs \frac{\partial U}{\partial s} + \kappa(\theta - v_t) \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{1}{2} v s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \rho \sigma v s \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} - rU = 0.$$

Demostración. Debido a que el par de procesos (s_t, v_t) es Markov se tiene que la función $V(t)$ calculada en (2.3) puede escribirse en términos del tiempo y de los procesos s y v , es decir, existe una función $U(t, s, v)$ tal que

$$U(t, s, v) = \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} g(s(T), v(T)) | \mathcal{F}(t) \right]. \quad (2.4)$$

Ahora, dados $0 \leq \omega \leq t \leq T$ se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-rt} U(t, s, v) | \mathcal{F}(\omega) \right] &= \mathbb{E} \left[e^{-rt} \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} g(s(T), v(T)) | \mathcal{F}(t) \right] | \mathcal{F}(\omega) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[e^{-rT} g(s(T), v(T)) | \mathcal{F}(t) \right] | \mathcal{F}(\omega) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-rT} g(s(T), v(T)) | \mathcal{F}(\omega) \right] \\ &= e^{-r\omega} \mathbb{E} \left[e^{-r(T-\omega)} g(s(T), v(T)) | \mathcal{F}(\omega) \right] \\ &= e^{-r\omega} U(\omega, s, v) \end{aligned}$$

de donde se deduce que $e^{-rt} U(t, s, v)$ es una martingala. De lo anterior se sigue que la diferencial de la martingala está dada por

$$\begin{aligned} e^{rt} d(e^{-rt} U(t, s, v)) &= -rU dt + \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial s} ds + \frac{\partial U}{\partial v} dv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} ds ds \\ &\quad + \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial s} dv ds + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} dv dv \end{aligned}$$

y por tanto del sistema (2.1) y el lema 2.1 se obtiene que

$$\begin{aligned} e^{rt} d(e^{-rt} U(t, s, v)) &= -rU dt + \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial s} (rs dt + \sqrt{v} s dW_t^s) + \frac{\partial U}{\partial v} (\kappa(\theta - v) dt + \sigma \sqrt{v} dW_t^v) \\ &\quad + \frac{1}{2} v s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} dt + \sigma \rho v s \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial s} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} dt \\ &= \left(-rU + \frac{\partial U}{\partial t} + rs \frac{\partial U}{\partial s} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{1}{2} v s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \sigma \rho v s \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial s} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right) dt \\ &\quad + \frac{\partial U}{\partial s} \sqrt{v} s dW_t^s + \sigma \sqrt{v} \frac{\partial U}{\partial v} dW_t^v \end{aligned}$$

Notemos ahora que el hecho de que $e^{-rt} U(t, s, v)$ sea una martingala implica que el coeficiente de dt sea nulo, ya que si fuera positivo o negativo, la martingala debería tener una tendencia a subir o decaer,

respectivamente, lo cual no puede suceder (Para más detalles ver [13]). De lo anterior obtenemos entonces que

$$\frac{\partial U}{\partial t} + rs \frac{\partial U}{\partial s} + \kappa(\theta - v_t) \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{1}{2} v s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \rho \sigma v s \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} - rU = 0.$$

lo que prueba el resultado deseado. □

CAPÍTULO 3

Métodos numéricos para la valoración de opciones

Por la complejidad de resolver ecuaciones diferenciales de tipo estocásticas se hace necesario utilizar algún método numérico que nos de una aproximación del resultado esperado con el modelo escogido para la valoración de opciones. A continuación se mencionará a groso modo algunos de ellos.

3.1. Métodos de árboles

Se puede visualizar árboles como una forma de organizar información de forma jerárquica, con un único punto de entrada y una serie de caminos que van abriendo paso en cada punto hacia sus sucesores; o sea, un árbol se puede considerar como una estructura $A = (N, y)$, constituida por un conjunto, N , cuyos elementos se denominan nodos, y una relación de orden parcial transitiva, y definida sobre N , y caracterizada por la existencia de un elemento mínimo y único, denominada la raíz; al mismo tiempo que un predecesor único para cada nodo p distinto de la raíz. Considerando esta estructura de manera recursiva teniendo en cuenta que cada nodo del árbol junto con todos sus descendientes, con el orden original constituye también un árbol.

El modelo binomial emplea árboles para calcular el precio del activo subyacente dadas unas características, este modelo supone que, en un mercado sin arbitraje, durante un período de tiempo, el precio del subyacente solo puede subir o bajar en una cantidad específica. Por lo tanto, el precio del activo tiene una distribución binomial; lo cual implica la construcción de un árbol binomial.

El método de árboles binomiales, es un modelo de tipo discreto que considera que la evolución del precio del activo subyacente sólo puede tomar dos valores posibles, uno de alza con probabilidad q y uno de baja con probabilidad $1 - q$; en cada intervalo de tiempo el valor del activo aumenta en u y disminuye en d factores que se presentan dependiendo de la variabilidad del precio del activo subyacente y del tiempo de expiración; originando mallas que representan la evolución de valores posibles del activo subyacente durante la vida de la opción; como se muestra en las siguientes referencias [11], [6].

Para la valoración por medio del árbol binomial es necesaria la introducción de un principio muy importante, la valoración riesgo-neutral, esto establece que cualquier derivado que depende del precio de un activo se puede valorar asumiendo que el mundo es neutral al riesgo. Los inversores neutrales al riesgo no aumentan la rentabilidad esperada que requiere de una inversión para compensar un mayor

riesgo.

Un mundo riesgo neutral tiene dos características que simplifican la valoración de derivados: El retorno esperado del activo es equivalente a la tasa libre de riesgo, y los flujos futuros se pueden valorar descontando sus valores esperados a la tasa de interés libre de riesgo; el árbol binomial representa el comportamiento del precio del activo dentro de este mundo riesgo neutral.

3.2. Métodos monte carlo

Se sabe por la Ley de los grandes números que un buen estimador del valor esperado de una variable aleatoria continua X con distribución F es la media aritmética de una muestra finita de variables aleatorias, independientes, con distribución F . Es decir, sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra de variables aleatorias, independientes, con distribución F , con primero y segundo momentos finitos, y denotemos por:

$$\bar{X}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \quad (3.1)$$

entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ y $0 < \delta < 1$, existe un natural M tal que para toda $m \geq M$ se tiene que:

$$P(|E(X) - \bar{X}_m| < \varepsilon) > 1 - \delta \quad (3.2)$$

Esta es la idea que está detrás del método de Monte-Carlo y que se usa para estimar el valor esperado de una función g continua cuyo argumento es una variable aleatoria con distribución F . Si se tiene una muestra de variables aleatorias, independientes, idénticamente distribuidas con distribución F , entonces

$$E(g(X)) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(X_i) \quad (3.3)$$

3.3. Método de líneas

El método de líneas es un método que se utiliza para resolver de manera numérica una EDP. Para el caso del modelo de Heston al ser este un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticos, si se quiere aplicar el método de líneas se hace necesario trabajar con la EDP asociada al modelo de Heston, la cual fue descrita en la sección anterior. El método de líneas se basa en discretizar la variable temporal usando métodos tipos Runge-Kutta mientras que las variables espaciales son discretizadas usualmente por medio de diferencias finitas, elementos finitos, volúmenes finitos, etc. Si bien los métodos Runge-Kutta se trabajan principalmente como estrategia para resolver EDOs, este se puede adaptar para resolver una EDP. La idea pasa por obtener un sistema de EDOs a partir de la EDP y la respectiva discretización de las variables espaciales. A continuación, mostraremos una reseña de los esquemas Runge-Kutta y las diferencias finitas.

CAPÍTULO 4

Esquemas tipo Runge-Kutta para el modelo de Heston

En esta sección impondremos condiciones de frontera para la EDP asociada al modelo de Heston. A su vez, introduciremos esquemas tipo Runge-Kutta con el fin de aproximar la solución de esta. Adicionalmente, ilustraremos algunos tests numéricos que muestran que los esquemas propuestos aproximan de manera adecuada la solución de la EDP.

4.1. EDP con condiciones de frontera

Consideremos una leve modificación del sistema (2.1), inspirada en , la cual está dada por

$$\begin{aligned} ds_t &= (r_d - r_f)s_t dt + s_t \sqrt{v_t} dW_t^s \\ dv_t &= k(\theta - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v \\ dW_t^s dW_t^v &= \rho dt \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde las nuevas incógnitas r_d and r_f representa las tasas de interés local y extranjeras, respectivamente. Entonces, siguiendo el análisis expuesto en la sección 3 al modelo (4.1), el valor de una opción $U(t, v, s)$, sujeta al activo s con volatilidad v , precio de strike E y tiempo de maduración T , satisface la EDP dada por

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (r_d - r_f)s \frac{\partial U}{\partial s} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{1}{2} v s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \rho \sigma v s \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} - r_d U = 0.$$

en la que introduciendo los cambios de variables $\tau = T - t$ y $x = \ln(s/E)$, y haciendo uso de la regla de la cadena mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\partial U}{\partial \tau}, & \frac{\partial U}{\partial s} &= \frac{1}{s} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} &= \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial v} &= \frac{1}{s} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial v} \end{aligned}$$

se transforma en:

$$-\frac{\partial U}{\partial \tau} + (r_d - r_f) \frac{\partial U}{\partial x} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{1}{2} v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \rho \sigma v \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} - r_d U = 0$$

Ahora, re-ordenando términos obtenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left((r_d - r_f) - \frac{1}{2}v \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial U}{\partial v} - r_d U. \quad (4.2)$$

para todo $v > 0, x \in (-\infty, \infty)$ y $\tau \in [0, T]$. Observemos que introduciendo las variables

$$\boldsymbol{\kappa} := \frac{1}{2}v \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma \\ \rho\sigma & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} := v \begin{pmatrix} \kappa \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\kappa\theta + \frac{1}{2}\sigma^2 \\ -(r_d - r_f) + \frac{1}{2}\rho\sigma^2 \end{pmatrix} \text{ y } \gamma := r_d,$$

obtenemos la EDP de reacción-convección-difusión dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa} \nabla U) + \mathbf{b} \cdot \nabla U + \gamma U &= 0 \quad \forall (\tau, (S, v)) \in (0, T) \times \Omega, \\ U(0, \cdot) &= U_0(\cdot) \quad \forall (S, v) \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un subespacio adecuado para las variables (S, v) . La EDP en la forma (4.3) fue introducida en [10] con el fin de facilitar la implementación de esquemas numéricos basadas en esquemas de Galerkin, como elementos finitos y galerkin discontinuos. Nuestro enfoque va encaminado a usar esquemas tipo Runge-Kutta por lo que optamos por trabajar la forma (4.2). Las condiciones de frontera para una opción tipo CALL están dadas por

$$\begin{aligned} U(0, v, x) &= \Phi(x) := \max \{ K(e^x - 1), 0 \} \\ U(\tau, v_{\min}, x) &= \Theta(\tau, x) := \max \{ K(e^{x - r_f \tau} - e^{-r_d \tau}), 0 \} \\ U(\tau, v_{\max}, x) &= \Psi(\tau, x) := K e^{x - r_f \tau} \\ U(\tau, v, x_{\min}) &= 0 \\ U(\tau, v, x_{\max}) &= \Upsilon(\tau) := \max \{ K(e^{x_{\max} - r_f \tau} - e^{-r_d \tau}), 0 \} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Condiciones de frontera mixta fueron consideradas también en (4.2), sin embargo, nosotros solo estudiaremos las tipos Dirichlet expuestas arriba.

4.2. Esquema numérico opciones tipo CALL

Consideremos una partición del dominio $[v_{\min}, v_{\max}] \times [x_{\min}, x_{\max}]$ donde utilizamos (n, r) nodos interiores en las variables espaciales (v, x) , es decir, construimos (v_i, x_j) con $i = 0, \dots, n+1, j = 0, \dots, r+1$ tales que

$$\begin{aligned} v_i &= v_{\min} + i\Delta v \text{ para } i = 0, \dots, n+1 \text{ y } \Delta v = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{n+1} \\ x_j &= x_{\min} + j\Delta x \text{ para } j = 0, \dots, r+1 \text{ y } \Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r+1} \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera para una opción tipo Call están dadas por :

$$\begin{aligned}
U_{ij}(0) &= \Phi_{ij} := \text{máx} \left\{ K(e^{x_j} - 1), 0 \right\} \\
U_{0j}(\tau) &= \Theta_j(\tau) := \text{máx} \left\{ K(e^{x_j - r_f \tau} - e^{-r_d \tau}), 0 \right\} \\
U_{(n+1)j}(\tau) &= \Psi_j(\tau) := K e^{x_j - r_f \tau} \\
U_{i0}(\tau) &= 0 \\
U_{i(r+1)}(\tau) &= \Upsilon_i(\tau) := \text{máx} \left\{ K(e^{x_{\text{max}} - r_f \tau} - e^{-r_d \tau}), 0 \right\}
\end{aligned}$$

Aplicando diferencias finitas centradas para las variables espaciales tenemos que :

$$\begin{aligned}
U'_{ij}(\tau) &= \frac{1}{2} v_i \frac{U_{i,j-1}(\tau) - 2U_{i,j}(\tau) + U_{i,j+1}(\tau)}{(\Delta x)^2} + \left((r_d - r_f) - \frac{1}{2} v_i \right) \frac{U_{i,j+1}(\tau) - U_{i,j-1}(\tau)}{2\Delta x} \\
&+ \rho \sigma v_i \frac{U_{i+1,j+1}(\tau) - U_{i-1,j+1}(\tau) - U_{i+1,j-1}(\tau) + U_{i-1,j-1}(\tau)}{\Delta v \Delta x} \\
&+ \frac{1}{2} \sigma^2 v_i \frac{U_{i-1,j}(\tau) - 2U_{i,j}(\tau) + U_{i+1,j}(\tau)}{(\Delta v)^2} \\
&+ \kappa(\theta - v_i) \frac{U_{i+1,j}(\tau) - U_{i-1,j}(\tau)}{2\Delta v} - r_d U_{i,j}(\tau)
\end{aligned}$$

de donde obtenemos :

$$\begin{aligned}
U'_{ij}(\tau) &= \alpha_i U_{i-1,j-1}(\tau) + \beta_i U_{i-1,j}(\tau) + \gamma_i U_{i-1,j+1}(\tau) + \delta_i U_{i,j-1}(\tau) + \varepsilon_i U_{i,j}(\tau) + \zeta_i U_{i,j+1}(\tau) \\
&+ \eta_i U_{i+1,j-1}(\tau) + \vartheta_i U_{i+1,j}(\tau) + \xi_i U_{i+1,j+1}(\tau)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_i &:= \frac{\rho \sigma v_i}{\Delta v \Delta x} \\
\beta_i &:= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 v_i}{(\Delta v)^2} - \frac{1}{2} \frac{\kappa(\theta - v_i)}{\Delta v} \\
\gamma_i &:= -\frac{\rho \sigma v_i}{\Delta v \Delta x} \\
\delta_i &:= \frac{1}{2} \frac{v_i}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{2\Delta x} \left((r_d - r_f) - \frac{1}{2} v_i \right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i &:= -\frac{v_i}{(\Delta x)^2} - \frac{\sigma^2 v_i}{(\Delta v)^2} - r_d \\
\zeta_i &:= \frac{1}{2} \frac{v_i}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2\Delta x} \left((r_d - r_f) - \frac{1}{2} v_i \right) \\
\eta_i &:= -\frac{\rho \sigma v_i}{\Delta v \Delta x} \\
\vartheta_i &:= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 v_i}{(\Delta v)^2} + \frac{1}{2} \frac{\kappa(\theta - v_i)}{\Delta v} \\
\xi_i &:= \frac{\rho \sigma v_i}{\Delta v \Delta x}
\end{aligned}$$

Definiendo $\Sigma_i(\tau) := (\gamma_i + \zeta_i + \xi_i)\Upsilon(\tau) = \zeta_i\Upsilon(\tau)$ y las matrices tridiagonales

$$\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} \beta_i & \gamma_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_i & \beta_i \end{bmatrix}, \mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_i & \zeta_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \delta_i & \varepsilon_i & \zeta_i & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_i & \varepsilon_i & \zeta_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_i & \varepsilon_i & \zeta_i & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \delta_i & \varepsilon_i & \zeta_i \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \delta_i & \varepsilon_i \end{bmatrix}, \mathcal{C}_i = \begin{bmatrix} \vartheta_i & \xi_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \eta_i & \vartheta_i & \xi_i & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \eta_i & \vartheta_i & \xi_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \eta_i & \vartheta_i & \xi_i & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \eta_i & \vartheta_i & \xi_i \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \eta_i & \vartheta_i \end{bmatrix}$$

obtenemos el siguiente análisis. Se puede ver que para $i = 1$ se sigue que

$$\begin{aligned} U'_{1j}(\tau) &= \alpha_1 U_{0(j-1)}(\tau) + \beta_1 U_{0j}(\tau) + \gamma_1 U_{0(j+1)}(\tau) + \delta_1 U_{1(j-1)}(\tau) + \varepsilon_1 U_{1j}(\tau) + \zeta_1 U_{1(j+1)}(\tau) \\ &\quad + \eta_1 U_{2(j-1)}(\tau) + \vartheta_1 U_{2j}(\tau) + \xi_1 U_{2(j+1)}(\tau) \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned} U'_{1j}(\tau) &= \delta_1 U_{1(j-1)}(\tau) + \varepsilon_1 U_{1j}(\tau) + \zeta_1 U_{1(j+1)}(\tau) + \eta_1 U_{2(j-1)}(\tau) + \vartheta_1 U_{2j}(\tau) + \xi_1 U_{2(j+1)}(\tau) \\ &\quad + \alpha_1 \Theta_{j-1}(\tau) + \beta_1 \Theta_j(\tau) + \gamma_1 \Theta_{j+1}(\tau) \end{aligned}$$

Si $j = 1$ se tiene:

$$U'_{11}(\tau) = \varepsilon_1 U_{11}(\tau) + \zeta_1 U_{12}(\tau) + \vartheta_1 U_{21}(\tau) + \xi_1 U_{22}(\tau) + \beta_1 \Theta_1(\tau) + \gamma_1 \Theta_2(\tau)$$

Si $j = 2$ se tiene

$$U'_{12}(\tau) = \delta_1 U_{11}(\tau) + \varepsilon_1 U_{12}(\tau) + \zeta_1 U_{13}(\tau) + \eta_1 U_{21}(\tau) + \vartheta_1 U_{22}(\tau) + \xi_1 U_{23}(\tau) + \alpha_1 \Theta_1(\tau) + \beta_1 \Theta_2(\tau) + \gamma_1 \Theta_3(\tau)$$

Si $j = r$ se tiene:

$$\begin{aligned} U'_{1r}(\tau) &= \delta_1 U_{1(r-1)}(\tau) + \varepsilon_1 U_{1r}(\tau) + \zeta_1 U_{1(r+1)}(\tau) + \eta_1 U_{2(r-1)}(\tau) + \vartheta_1 U_{2r}(\tau) + \xi_1 U_{2(r+1)}(\tau) \\ &\quad + \alpha_1 \Theta_{r-1}(\tau) + \beta_1 \Theta_r(\tau) + \gamma_1 \Theta_{r+1}(\tau) \end{aligned}$$

o bien:

$$U'_{1r}(\tau) = \delta_1 U_{1(r-1)}(\tau) + \varepsilon_1 U_{1r}(\tau) + \eta_1 U_{2(r-1)}(\tau) + \vartheta_1 U_{2r}(\tau) + \alpha_1 \Theta_{r-1}(\tau) + \beta_1 \Theta_r(\tau) + (\gamma_1 + \zeta_1 + \xi_1)\Upsilon(\tau)$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} U'_{11}(\tau) \\ U'_{12}(\tau) \\ \vdots \\ U'_{1(r-1)}(\tau) \\ U'_{1r}(\tau) \end{pmatrix} = \mathcal{B}_1 \begin{pmatrix} U_{11}(\tau) \\ U_{12}(\tau) \\ \vdots \\ U_{1(r-1)}(\tau) \\ U_{1r}(\tau) \end{pmatrix} + \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} U_{21}(\tau) \\ U_{22}(\tau) \\ \vdots \\ U_{2(r-1)}(\tau) \\ U_{2r}(\tau) \end{pmatrix} + \mathcal{A}_1 \begin{pmatrix} \Theta_1(\tau) \\ \Theta_2(\tau) \\ \vdots \\ \Theta_{r-1}(\tau) \\ \Theta_r(\tau) \end{pmatrix} + \Sigma_1(\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $i = 2$ se sigue que

$$\begin{aligned} U'_{2j}(\tau) &= \alpha_2 U_{1(j-1)}(\tau) + \beta_2 U_{1j}(\tau) + \gamma_2 U_{1(j+1)}(\tau) + \delta_2 U_{2(j-1)}(\tau) + \varepsilon_2 U_{2j}(\tau) + \zeta_2 U_{2(j+1)}(\tau) \\ &\quad + \eta_2 U_{3(j-1)}(\tau) + \vartheta_2 U_{3j}(\tau) + \xi_2 U_{3(j+1)}(\tau) \end{aligned}$$

entonces, si $j = 1$ se tiene:

$$U'_{21}(\tau) = \alpha_2 U_{10}(\tau) + \beta_2 U_{11}(\tau) + \gamma_2 U_{12}(\tau) + \delta_2 U_{20}(\tau) + \varepsilon_2 U_{21}(\tau) + \zeta_2 U_{22}(\tau) + \eta_2 U_{30}(\tau) + \vartheta_2 U_{31}(\tau) + \xi_2 U_{32}(\tau)$$

o bien:

$$U'_{21}(\tau) = \beta_2 U_{11}(\tau) + \gamma_2 U_{12}(\tau) + \varepsilon_2 U_{21}(\tau) + \zeta_2 U_{22}(\tau) + \vartheta_2 U_{31}(\tau) + \xi_2 U_{32}(\tau)$$

Si $j = 2$ se tiene:

$$U'_{22}(\tau) = \alpha_2 U_{11}(\tau) + \beta_2 U_{12}(\tau) + \gamma_2 U_{13}(\tau) + \delta_2 U_{21}(\tau) + \varepsilon_2 U_{22}(\tau) + \zeta_2 U_{23}(\tau) + \eta_2 U_{31}(\tau) + \vartheta_2 U_{32}(\tau) + \xi_2 U_{33}(\tau)$$

Si $j = r$ se tiene:

$$\begin{aligned} U'_{2r}(\tau) &= \alpha_2 U_{1(r-1)}(\tau) + \beta_2 U_{1r}(\tau) + \gamma_2 U_{1(r+1)}(\tau) + \delta_2 U_{2(r-1)}(\tau) + \varepsilon_2 U_{2r}(\tau) + \zeta_2 U_{2(r+1)}(\tau) \\ &\quad + \eta_2 U_{3(r-1)}(\tau) + \vartheta_2 U_{3r}(\tau) + \xi_2 U_{3(r+1)}(\tau) \end{aligned}$$

o bien:

$$U'_{2r}(\tau) = \alpha_2 U_{1(r-1)}(\tau) + \beta_2 U_{1r}(\tau) + \delta_2 U_{2(r-1)}(\tau) + \varepsilon_2 U_{2r}(\tau) + \eta_2 U_{3(r-1)}(\tau) + \vartheta_2 U_{3r}(\tau) + (\gamma_2 + \zeta_2 + \xi_2) \Upsilon(\tau)$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} U'_{21}(\tau) \\ U'_{22}(\tau) \\ \vdots \\ U'_{2(r-1)}(\tau) \\ U'_{2r}(\tau) \end{pmatrix} = \mathcal{A}_2 \begin{pmatrix} U_{11}(\tau) \\ U_{12}(\tau) \\ \vdots \\ U_{1(r-1)}(\tau) \\ U_{1r}(\tau) \end{pmatrix} + \mathcal{B}_2 \begin{pmatrix} U_{21}(\tau) \\ U_{22}(\tau) \\ \vdots \\ U_{2(r-1)}(\tau) \\ U_{2r}(\tau) \end{pmatrix} + \mathcal{C}_2 \begin{pmatrix} U_{31}(\tau) \\ U_{32}(\tau) \\ \vdots \\ U_{3(r-1)}(\tau) \\ U_{3r}(\tau) \end{pmatrix} + \Sigma_2(\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $i = n$ se tiene que:

$$\begin{aligned} U'_{nj}(\tau) &= \alpha_n U_{(n-1)(j-1)}(\tau) + \beta_n U_{(n-1)j}(\tau) + \gamma_n U_{(n-1)(j+1)}(\tau) + \delta_n U_{n(j-1)}(\tau) + \varepsilon_n U_{nj}(\tau) + \zeta_n U_{n(j+1)}^\ell(\tau) \\ &\quad + \eta_n U_{(n+1)(j-1)}(\tau) + \vartheta_n U_{(n+1)j}(\tau) + \xi_n U_{(n+1)(j+1)}(\tau) \end{aligned}$$

entonces, si $j = 1$ se sigue que:

$$\begin{aligned} U'_{n1}(\tau) &= \alpha_n U_{(n-1)0}(\tau) + \beta_n U_{(n-1)1}(\tau) + \gamma_n U_{(n-1)2}(\tau) + \delta_n U_{n0}(\tau) + \varepsilon_n U_{n1}(\tau) + \zeta_n U_{n2}(\tau) \\ &\quad + \eta_n U_{(n+1)0}(\tau) + \vartheta_n U_{(n+1)1}(\tau) + \xi_n U_{(n+1)2}(\tau) \end{aligned}$$

o bien:

$$U'_{n1}(\tau) = \beta_n U_{(n-1)1}(\tau) + \gamma_n U_{(n-1)2}(\tau) + \varepsilon_n U_{n1}(\tau) + \zeta_n U_{n2}(\tau) + \vartheta_n \Psi_1(\tau) + \xi_n \Psi_2(\tau)$$

si $j = 2$ se tiene que:

$$\begin{aligned} U'_{n2}(\tau) &= \alpha_n U_{(n-1)1}(\tau) + \beta_n U_{(n-1)2}(\tau) + \gamma_n U_{(n-1)3}(\tau) + \delta_n U_{n1}(\tau) + \varepsilon_n U_{n2}(\tau) + \zeta_n U_{n3}(\tau) \\ &\quad + \eta_n U_{(n+1)1}(\tau) + \vartheta_n U_{(n+1)2}(\tau) + \xi_n U_{(n+1)3}(\tau) \end{aligned}$$

o bien:

$$U'_{n2}(\tau) = \alpha_n U_{(n-1)1}(\tau) + \beta_n U_{(n-1)2}(\tau) + \gamma_n U_{(n-1)3}(\tau) + \delta_n U_{n1}(\tau) + \varepsilon_n U_{n2}(\tau) + \zeta_n U_{n3}(\tau) \\ + \eta_n \Psi_1(\tau) + \vartheta_n \Psi_2(\tau) + \xi_n \Psi_3(\tau)$$

para $j = r$ se tiene que:

$$U'_{nr}(\tau) = \alpha_n U_{(n-1)(r-1)}(\tau) + \beta_n U_{(n-1)r}(\tau) + \gamma_n U_{(n-1)(r+1)}(\tau) + \delta_n U_{n(r-1)}(\tau) + \varepsilon_n U_{nr}(\tau) + \zeta_n U_{n(r+1)}(\tau) \\ + \eta_n U_{(n+1)(r-1)}(\tau) + \vartheta_n U_{(n+1)r}(\tau) + \xi_n U_{(n+1)(r+1)}(\tau)$$

o bien:

$$U'_{nr}(\tau) = \alpha_n U_{(n-1)(r-1)}(\tau) + \beta_n U_{(n-1)r}(\tau) + \delta_n U_{n(r-1)}(\tau) + \varepsilon_n U_{nr}(\tau) + \eta_n \Psi_{r-1}(\tau) + \vartheta_n \Psi_r(\tau) + (\gamma_n + \zeta_n + \xi_n) \Upsilon(\tau)$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} U'_{n1}(\tau) \\ U'_{n2}(\tau) \\ \vdots \\ U'_{n(r-1)}(\tau) \\ U'_{nr}(\tau) \end{pmatrix} = \mathcal{A}_n \begin{pmatrix} U_{(n-1)1}(\tau) \\ U_{(n-1)2}(\tau) \\ \vdots \\ U_{(n-1)(r-1)}(\tau) \\ U_{(n-1)r}(\tau) \end{pmatrix} + \mathcal{B}_n \begin{pmatrix} U_{n1}(\tau) \\ U_{n2}(\tau) \\ \vdots \\ U_{n(r-1)}(\tau) \\ U_{nr}(\tau) \end{pmatrix} + \mathcal{C}_n \begin{pmatrix} \Psi_1(\tau) \\ \Psi_2(\tau) \\ \vdots \\ \Psi_{r-1}(\tau) \\ \Psi_r(\tau) \end{pmatrix} + \Sigma_n(\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definiendo ahora $\mathbf{U}(\tau) = (\mathbf{U}_{ij}(\tau))_{i,j=1,1}^{n,r}$ nuestro sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias queda:

$$\begin{cases} \mathbf{U}'(\tau) = \mathbf{F}(\tau, \mathbf{U}(\tau)) \\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0 \end{cases}$$

donde $\mathbf{U}_0 = (\Phi_{11}, \dots, \Phi_{1r}, \Phi_{21}, \dots, \Phi_{2r}, \dots, \Phi_{n1}, \dots, \Phi_{nr})^T$ y $\mathbf{F}(\tau, \mathbf{U}(\tau)) = \mathcal{M}\mathbf{U}(\tau) + c(\tau)$ con $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{nr \times nr}$ esta dada por

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{C}_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{C}_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_3 & \mathcal{B}_3 & \mathcal{C}_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mathcal{A}_{n-2} & \mathcal{B}_{n-2} & \mathcal{C}_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathcal{A}_{n-1} & \mathcal{B}_{n-1} & \mathcal{C}_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \mathcal{A}_n & \mathcal{B}_n \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 5

Experimentos Numéricos

En este capítulo consideraremos varios tests numéricos que muestran la versatilidad de los esquemas tipo Runge-Kutta. Se ilustrarán sus ventajas y desventajas. Para los tests de la secciones 5.1 y 5.2 se usarán como parámetros del modelo los registrados en la siguiente tabla.

Dato	Valor
Precio de Strike (E)	110
Tiempo de Maduración	1
Tasa de Reversión a la media (k)	1
Volatilidad Media (θ)	0.09
Tasa de Interés Local (r_d)	0.05
Tasa de Interés Extranjera (r_f)	0.01
Volatilidad de la volatilidad (σ)	0.4
Factor de correlación (ρ)	-0.7

Cuadro 5.1: Parámetros tests

El rango determinando para las variables del modelo son tales que $(v, x) \in [0, 4] \times [-2, 2]$ y la variable temporal se mueve en $[0, 1]$. Tomaremos como tamaños de paso $\Delta v = \Delta x = 0.125$ mientras que $\Delta \tau = 0.0025$. Para las demás secciones se usarán diversos parámetros y tamaños de paso.

5.1. Métodos Explícitos

En esta sección usaremos tres esquema explícitos correspondientes al método de Euler explícito

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

al método de Heun,

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

y al método de cuatro etapas clasico,

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Los resultados en relación a los errores cometidos se pueden apreciar en la siguiente tabla. En la tabla se pueden ver como estos esquemas numéricos poseen un margen error apropiado a los tamaños de paso considerados. Cabe aclarar que los valores de las primas, fueron calculados usando splines cúbicos tomando como valores fijos a $v = 0.25$ y procediendo a interpolar en los nodos del intervalo para x .

Precio Stike	Valor Prima	Err-Euler-Exp	Err-Heun	Err-RK4
90	23.464	7.6465e-03	7.9514e-03	7.9510e-03
95	20.739	1.2394e-02	1.2754e-02	1.2754e-02
100	18.231	1.8693e-02	1.9109e-02	1.9108e-02
105	15.938	2.6252e-02	2.6721e-02	2.6720e-02
110	13.857	3.4680e-02	3.5201e-02	3.5200e-02
115	11.979	4.2911e-02	4.3479e-02	4.3479e-02
130	7.483	6.0135e-02	6.0810e-02	6.0810e-02
150	3.701	5.0673e-02	5.1354e-02	5.1354e-02

Cuadro 5.2: Errores métodos explícitos.

5.2. Métodos Implícitos

Para esta sección usaremos tres esquemas implícitos correspondientes al método de Euler implícito

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

al método de punto medio implícito,

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

y al método de Crank-Nicholson,

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Los resultados en relación a los errores cometidos se pueden apreciar en la siguiente tabla. En esta tabla se pueden ver como estos esquemas numéricos poseen un margen error apropiado a los tamaños de paso considerados, al igual que los explícitos. Cabe aclarar que los valores de las primas, fueron calculados usando splines cúbicos tomando como valores fijos a $v = 0.25$ y procediendo a interpolar en los nodos del intervalo para x . Se observa que algunos de los errores son ligeramente superiores a los reportados por los esquemas explícitos. Es evidente, como era de esperarse, que el método de Crank-Nicholson reporta errores más pequeños.

Precio Stike	Valor Prima	Err-Euler-Imp	Err-PtoMedio-Imp	Err-CN
90	23.464	8.2553e-03	7.9508e-03	7.9508e-03
95	20.739	1.3113e-02	1.2753e-02	1.2753e-02
100	18.231	1.9523e-02	1.9108e-02	1.9108e-02
105	15.938	2.7189e-02	2.6720e-02	2.6720e-02
110	13.857	3.5720e-02	3.5200e-02	3.5200e-02
115	11.979	4.4046e-02	4.3478e-02	4.3478e-02
130	7.483	6.1483e-02	6.0809e-02	6.0809e-02
150	3.701	5.2032e-02	5.1354e-02	5.1354e-02

Cuadro 5.3: Errores métodos implícitos.

5.3. Efecto del Tamaño de Paso

El siguiente test quiere mostrar el efecto que tiene el tamaño de paso en las variables espaciales cuando usamos esquemas explícitos e implícitos. Se usarán los mismos datos de la tabla (tal) y se irán disminuyendo los tamaños de pasos $h = \Delta v = \Delta x$ manteniendo $\Delta\tau = 0.005$. Los resultados son mostrados en la siguiente tabla.

h	Err-Euler-Exp	Err-Euler-Imp	Err-CN
1/4	1.0852e-01	1.0957e-01	1.0851e-01
1/8	3.5200e-02	3.6239e-02	3.5199e-02
1/12	2.3057e+01	1.6138e-02	1.5121e-02
1/16	Inf	8.8075e-03	7.8138e-03

Cuadro 5.4: Efecto del Tamaño de Paso

Los resultados evidencian como el tamaño de paso afecta los errores para los esquemas explícitos. De la literatura se sabe que este tipos de esquemas son condicionalmente estables, es decir, que su convergencia depende del tamaño de la malla. Los esquemas implícitos presentan mayor robustez y no se ven afectado por los tamaños de paso. De nuevo es evidente como Crank-Nicholson arroja errores ligeramente menores.

5.4. Efecto del Tiempo de Maduración

La idea de los ejemplos numéricos reportados en esta sección es validar el efecto que tiene el tiempo de maduración en el calculo de la prima. Para tal fin, tomaremos como base los datos reportados en la tabla 5. Se tomará como valor fijo el valor de $v = 0.25$ e iremos variando los valores de x en el rango, a su vez que variamos el tiempo de maduración. Los resultados son mostrados en la siguiente figura, la cual nos revela que los valores de las primas van aumentando para ciertos rangos de x . Aquí fue usado un esquema implícito de tipo Crank-Nicholson.

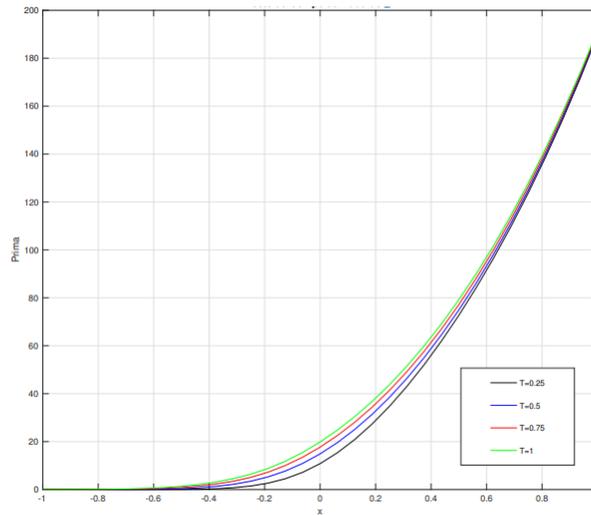


Figura 5.1: Efecto del tiempo de maduración sobre la prima.

Como se puede observar de la grafica anterior el tiempo de maduración tiende a aumentar el valor de la prima, pero esto solo es visible para ciertos rangos de la variable x . Notamos que a pesar que la variable x está definida en $[-1, 1]$ el efecto solo es apreciable en $[-0.5, 0.5]$.

Conclusiones y Trabajos Futuros

- Se implementaron esquemas numéricos tipo Runge-kutta tanto explícitos como implícitos para el modelo de Heston.
- Se evidenciaron las ventajas y desventajas de cada uno de ellos.
- Se logró implementar computacionalmente los esquemas mencionados con el fin de aproximar el modelo de Heston de manera adecuada.
- Se espera poder extender el análisis presentado a modelos más avanzados que permitan aproximar el cálculo de la prima para las opciones europeas.

Bibliografía

- [1] G. A.C, *Análisis empírico del modelo de Heston en opciones sobre el índice SP500*, Tesis de pregrado. Universidad de los Andes, 2007.
- [2] F. BLACK AND M. SCHOLES, *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Polit. Econ., 81 (1973), pp. 637–654.
- [3] I. J. Y. R. S. COX, J.C., *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, 53 (1985), pp. 385–407.
- [4] G. CUESTA, *Introducción a los modelos de volatilidad estocástica*, Tesis de maestría. Uned, 2014.
- [5] W. FANG, *From Constant to Stochastic Volatility: Black-Scholes Versus Heston Option Pricing Models*, Senior Projects Spring, 2019.
- [6] F. GARCIA AND R. ROMERO, *Caracterización y análisis de modelos de evaluación económica de proyectos de inversión bajo incertidumbre*, 8 (2009).
- [7] A. GAVIRIA, *Análisis empírico del Modelo de Heston en Opciones sobre el índice S&P500*, Proyecto de Grado. Universidad de los Andes, 2007.
- [8] S. L. HESTON, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Rev. Financ. Stud., 6 (1993), pp. 327–343.
- [9] R. C. MERTON, *Theory of rational option pricing*, Bell J. Econom. and Management Sci., 4 (1973), pp. 141–183.
- [10] L. RINCÓN, *Introducción a los procesos estocásticos*, Libro. Universidad UNAM, 2012.
- [11] V. ROZO, *Contraste entre técnicas tradicionales de inversión y valoración de opciones reales en ambientes de incertidumbre, utilizando el modelo de Black-Scholes y el método binomial*, Tesis de maestría. Universidad del Norte, 2007.
- [12] A. SEVILLA, *Opción de compra (call)*, www.economipedia.com, 2015.
- [13] S. SHREVE, *Stochastic Calculus for Finance II: continuous-time models*, Springer, 2004.
- [14] A. TRESIERRA AND C. MARILIA, *Valorización de opciones reales: modelo ornstein-uhlenbeck*, J. Econ. finan. adm., 21 (2016), pp. 56–62.
- [15] V. VELAYOS, *Opciones financieras*, www.economipedia.com, 2015.