



**Simulación de artificios en imágenes de tomografía computarizada y
clasificación automática usando algoritmos de machine learning**

Carlos Andrés Bustos Garay

Universidad ECCI
Facultad De Ingeniería
Dirección De Ingeniería Biomédica
Programa De Ingeniería Biomédica
Bogotá, D.C.
2022

Simulación de artificios en imágenes de tomografía computarizada y
clasificación automática usando algoritmos de machine learning

Carlos Andrés Bustos Garay

Trabajo de investigación presentada(o) como requisito para optar al título de: Ingeniero
Biomédico

Director (a):
M.Sc. Ing. Javier Andrés Almeida

Universidad ECCI
Facultad De Ingeniería
Dirección De Ingeniería Biomédica
Programa De Ingeniería Biomédica
Bogotá, D.C.
2022

Agradecimientos

Deseo expresar mis agradecimientos a Dios y a Jesús, que me inspiraron, animaron y me llenaron de fuerzas en los momentos difíciles, pero de igual manera me guiaron a culminar este proyecto. Mi agradecimiento especial a mi tutor y docente el Ingeniero Javier Andres Almeida, que siempre me acompañó, por su valiosa colaboración y asesoría que permitió la culminación y la elaboración del presente trabajo.

A la universidad ECCI que me brindó de las herramientas tecnológicas para la realización del presente trabajo, por medio de las licencias del software MATLAB.

Y finalmente a mis padres Alcira Garay e Isauro Bustos y mi hijo Samuel Bustos, que sin su apoyo no podría completar este maravilloso trabajo.

Índice

1. Planteamiento del problema	8
1.1. Pregunta problema	8
2. Objetivos	8
2.1. Objetivo general	8
2.2. Objetivos específicos	8
3. Estado del arte	9
4. Marco teórico	10
4.1. Arquitecturas de sistemas computacionales	12
4.2. Reconstrucción de imágenes	13
4.3. Obtención de sinograma	14
4.4. Principios matemáticos de reconstrucción de imágenes	14
4.5. Métodos Analíticos	16
4.6. Transformada de Radón	17
4.7. El teorema de corte Fourier	18
4.8. Algoritmo de retroproyección filtrado	19
4.9. Métodos algebraicos de reconstrucción	20
4.10. Reconstrucción por métodos iterativos	20
4.11. Métodos de Siddon	23
4.12. Algoritmo de Siddon	24
4.13. Singular Value Decomposition	26
4.14. Machine Learning	26
4.15. Maquinas de soporte vectorial (SVMs)	26
4.15.1. SVM para regresión	27
4.15.2. SVM para clasificación	27
4.16. Validación Cruzada	30
4.16.1. Validación cruzada Leave-one-out	30
4.16.2. Validación cruzada k iteraciones	30
4.17. Curva ROC	31
5. Metodología	31
5.1. Set de imágenes	32
5.2. Simulación de artificios	32
5.2.1. Movimiento del paciente	32

5.2.2. Anillos concéntricos	33
5.2.3. Endurecimiento del haz	33
5.2.4. Extracción de características	34
5.3. Aprendizaje de máquina	34
6. Resultados	34
7. Discusión de resultados	39
8. Conclusiones	40

Índice de figuras

1.	Rebanada Anatómica Volumétrica Vóxel	11
2.	Representación gráfica de la escala de Hounsfield	12
3.	Arquitectura de sistemas computacionales	13
4.	Generación del sinograma	14
5.	Tomada de: [1]	14
6.	Proyecciones de una TAC	15
7.	Proyección representada por una banda sobre una cuadrícula.	15
8.	Proyección $R(\theta, s)$ para un ángulo θ , proyecciones paralelas	18
9.	Representación esquemática del teorema de corte de Fourier	19
10.	Resultado de integración de proyecciones, Reconstrucción tomográfica	20
11.	Tomado de: [2]	20
12.	Ejemplo del método ART en una matriz 2*2	21
13.	Sistema de 12 ecuaciones y 9 incógnitas	22
14.	Ilustración del algoritmo de Siddon	23
15.	El valor $a(i,j)$ de la proyección P_k, θ_r	24
16.	Esquema de escaneo de un objeto por Rayos-X	24
17.	Flujograma del algoritmo de Siddon	25
18.	Arquitectura de SVM para regresión	27
19.	Caso linealmente separable	28
20.	Caso no linealmente separable	28
21.	Idea del uso de un Kernel, para la transformación del espacio de los datos	29
22.	Separación tipo Hold-out	30
23.	Validación cruzada con k-folds	31
24.	Metodología propuesta para la simulación y clasificación de artificios en imágenes de TAC	32
25.	Imagen escanografía normal de orbita, misma imagen con simulación de movimiento	34
26.	Izquierda: escáner normal cerebral, Centro: simulación de endurecimiento del haz incidente, Derecha: artificios dobles y anillos concéntricos de la imagen original	35
27.	Curva ROC imagen original vs anillos concéntricos	35
28.	Curva ROC imagen original vs Artifact Harding Beam	36
29.	Curva ROC imagen original vs Artifact Rotation	37

Índice de tablas

1.	Valores de Atenuación para tejidos frecuentes	12
2.	Matriz de confusión para el algoritmo de clasificación	38
3.	Resultados finales del algoritmo de clasificación con una comparación inter-clase entre los artefactos simulados y la imagen original.	39

Resumen

La Tomografía axial computada ha permitido el diagnóstico temprano de múltiples patologías en cualquier parte del cuerpo. La exploración del cráneo y del cerebro por medio de un escáner nos muestra de manera detallada cada estructura que lo componen y acompañado de medios de contraste resalta las estructuras vasculares circundantes. En la práctica de un estudio pueden aparecer artificios o artefactos independientemente de su origen, que limitan la exploración escanográfica, esto lleva a detener el examen e iniciar de nuevo y sumado a esto con los medios de contraste se tienen que aplicar de nuevo dichos fármacos. Los escáneres de última generación permiten realizar reconstrucciones completas con pocas proyecciones limitando las dosis de radiación, por medio de métodos algebraicos estadísticos de reconstrucción. El presente trabajo muestra la simulación de artificios en imágenes de tomografía computarizada cerebral, la extracción de características de cada imagen y un algoritmo de clasificación automática para la diferenciación de los artefactos simulados. Los resultados muestran que el algoritmo es capaz de clasificar los artificios simulados con un porcentaje de 90 % debajo de la curva ROC.

Palabras clave: Artificios, Aprendizaje de máquina, clasificación automática, simulación de artificios, tomografía axial computarizada.

Introducción

La reconstrucción de imágenes en tomografía axial computada, (TAC), consiste en emplear adecuadamente la interacción de los rayos-x con el cuerpo, teniendo en cuenta las proyecciones obtenidas en cada trayectoria del haz y la información captada por cada uno de los detectores. Se realizan muchas proyecciones en un mismo plano, para reconstruir la sección transversa de la parte del cuerpo a explorar. El cuerpo humano está compuesto por estructuras de distintas densidades muy diferenciadas entre sí, lo cual permite crear un patrón de reconocimiento, que ayuda en el procesamiento de imágenes, además de su incidencia e interacción de los rayos x, los cuales son determinísticos por el haz del rayo y sus respectivas proyecciones según el ángulo de rotación y su llegada a los detectores. En cuanto a obtención de imagen, se debe tener en cuenta aspectos importantes que se han ido mejorando a través de la evolución de la tomografía axial computada TAC, uno de los más relevantes es la reducción de tiempo de escaneo, con el fin de minimizar las dosis de exposición, mejorar la calidad de imagen, para esto se necesita algoritmos de reconstrucción específicos y al mismo tiempo reducir los tiempos de reconstrucción. Uno de los primeros métodos de reconstrucción de imagen fue desarrollado por Johann Radon en 1917 [3], quien empleo una solución matemática a través de una transformada, que indica que una imagen está determinada por un conjunto infinito de sus proyecciones [4] aunque en TAC se puede determinar el número de proyecciones, aun así, no es necesario la implementación de una fórmula matemática para su procesamiento, si no que se aplica algoritmos eficientes para evaluarla.

En los procesos matemáticos de reconstrucción de imagen, los métodos estadísticos cumplen una función complementaria a los métodos analíticos, pero diferenciales al mismo tiempo, siendo los de iteración nuestro objeto de estudio en el presente trabajo.

1. Planteamiento del problema

La adquisición de imágenes en la tomografía axial computada (TAC), depende de métodos tanto matemáticos como analíticos para el procesamiento de datos, cada uno de ellos son empleados para garantizar un óptimo desarrollo de procesamiento de imágenes, sin embargo, estos procesos deben tener en cuenta aspectos que hacen de la tomografía un excelente medio de diagnóstico en medicina, tales como calidad de imagen, tiempos de adquisición y procesamiento, minimizar dosis de radiación, reducción de ruido y de artefactos y costos computacionales.

La calidad de imagen es el resultado de la aplicación de todos los procesos antes mencionados, pero existe la posibilidad en la práctica clínica el estado del paciente como fuente de generación de artificios y movimientos involuntarios [5], aspectos que alteran la calidad de imagen y su diagnóstico, generalmente es necesario repetir el examen, implicando sobre dosis de radiación al paciente y en casos donde se suministre medios de contraste se pierde los tiempos de recorrido en las fases arterial y venosa, teniendo que aplicar nuevamente estas sustancias. A partir de métodos de procesamiento como la transformada de Fourier, Wavelet o Radón, se puede lograr completar el estudio sin la necesidad de volver a repetir el examen, a través de una reconstrucción iterativa por aproximación, que permite recopilar y recuperar imágenes para completar el estudio, aun así, estos métodos requieren de un algoritmo complejo y de la implementación adecuada de los datos para su procesamiento. A través del uso de machine learning, y los distintos tipos de clasificación computacional ayudan a determinar de manera asertiva cuando aparezca una imagen con un artificio a partir de una imagen previa, de manera automática se reconoce y se procede a realizar el proceso de corrección, sin necesidad de reiniciar el estudio.

1.1. Pregunta problema

A partir de esta información se plantea la siguiente pregunta: ¿Cómo se pueden simular artificios presentes en imágenes de tomografía axial computarizada y clasificar por medio de algoritmos de aprendizaje de máquina?

2. Objetivos

2.1. Objetivo general

Simular artificios de tomografía axial computarizada y clasificarlos por medio de algoritmos de aprendizaje de máquina.

2.2. Objetivos específicos

1. Simular los artefactos más comunes en imágenes de tomografía mediante una herramienta computacional.
2. Reducir la dimensionalidad de la imagen tomográfica a partir de extracción de características.

3. Entrenar un algoritmo de aprendizaje de máquina para clasificar las imágenes con artificios de las imágenes originales.
4. Validar la estrategia propuesta.

3. Estado del arte

Actualmente, se adelantan trabajos sobre el desarrollo de nuevas técnicas para los dispositivos en tomografía axial computada (TAC), enfocados en áreas de investigación tales como, disminución de dosis, ergonomía de la tecnología, optimización de imágenes, entre otros, uno de los más importantes avances del cual se basará el presente trabajo es la aplicación y estudio de diferentes formas de reconstrucción de imágenes por medio de métodos estadísticos y de iteración, con el fin de reducir artefactos o artificios que afecten o alteren la calidad de las imágenes. En el diagnóstico por imágenes, la obtención de calidad es indispensable para establecer un diagnóstico preciso, además de diferenciar las estructuras normales y patológicas, con que es de primordial relevancia que la imagen sea de excelente calidad.

Los artefactos o artificios ocasionan un gran problema, porque puede alterar la interpretación o recrear patologías no existentes (pitfalls), además esto también puede dar tratamientos erróneos [5], riesgos de aparición de reacciones adversas, sobrecostos, etc. lo que acarrea repetir el estudio al paciente incrementando las dosis absorbidas y en casos donde se haya suministrado medios de contrastes, implica preparar nuevamente al paciente lo cual son normalmente incómodos. Se puede definir los artefactos o los artificios como la distorsión, adición o error en una imagen que no tiene correlación con la anatomía estudiada. En tomografía (TAC), las distorsiones pueden ser numerosas y variadas, y cuando éstas aparecen independientemente de su origen o su naturaleza se manifiestan en forma de ruido y se pueden observar como rayas, anillos, bandas blancas y negras, imágenes superpuestas [3]. Los artificios son el resultado de la interacción entre el paciente y el equipo (respiración, latidos cardiacos, temblor, excitación, nerviosismo, deglución, peristaltismo, etc.) éstos pueden aparecer según las estructuras anatómicas a explorar. Los artefactos son las distorsiones en la imagen con características especiales que tienen su origen en cuerpos extraños o ajenos al cuerpo (prótesis dentales, implantes metálicos, materiales de osteosíntesis piercings, joyas utensilios médicos, etc.) se pueden reconocer como elementos de alta densidad, que genera un halo de falsa absorción en una o varias direcciones, como consecuencia el aumento de densidad, en forma de rayos de sol [5].

Teniendo en cuenta investigaciones previas sobre el procesamiento y reconstrucción de imágenes a partir de estudios que tengan artificios o artefactos, afectando la calidad de imagen, se desarrollan diferentes algoritmos a través de los métodos estadísticos y de iteración con el fin poder corregir, minimizar los artificios o artefactos independientemente de su origen. Tal es el caso del artículo Geometric correction for Cone-Beam CT reconstruction and artifacts reduction, del School of Biomedical Engineering de la ciudad, Guangzhou, China [6], que trata sobre la corrección de la geometría del haz en forma de cono (cone-beam) para la reducción de los artefactos en la reconstrucción de imágenes en TAC, basados en algoritmos Feldkamp, Davis, Kress (FDK), que permite una mayor velocidad de procesamiento y que aprovecha las posibilidades de computo paralelo, usando algoritmos analíticos como primera medida de reconstrucción FBP. Sin embargo, en

la implementación de algoritmos tipo FDK, pueden ser procesados a través de los dos métodos existentes analíticos y matemáticos [6], pero éstos últimos llevan mucho tiempo y demanda más recursos computacionales, por lo tanto, en la práctica los métodos analíticos ofrecen alta velocidad el tratamiento de datos a la hora de la reconstrucción de imágenes.

Otro trabajo interesante sobre el estudio de los artificios y artefactos en tomografía, a través de un cráneo robótico el cual es capaz de simular artificios generados por los movimientos involuntarios del paciente que afectan la imagen, con el fin de modificar algoritmos de reconstrucción que puedan mitigar en gran medida esta afectación, artículo llamado Cone beam CT image artefacts related to head motion simulated by a robot skull: visual characteristics and impact on image quality, desarrollado en Gemeinschaftspraxis für Zahnheilkunde, Gelnhausen, Alemania [7].

En la universidad de Erlangen, Núremberg, junto con el departamento de desarrollo de SIEMENS, están trabajando para la reducción de artificios por movimiento ocasional, por medio de phantoms, la interacción de los rayos-x, con los detectores, los cuales buscan a través de calibraciones más precisas la atenuación de estos efectos en la calidad de imagen. El artículo se llama Image features for misalignment correction in medical flat-detector CT [8], Núremberg, Alemania.

4. Marco teórico

En la década de los 70's Hounsfield desarrollo el primer tomógrafo, con imágenes de resolución de 80x80 cuadros, con mucho ruido, en la cual se basó en procedimientos algebraicos de trabajos anteriores como las transformadas de Radon y su inversa, para el reconocimiento de patrones en la reconstrucción de las primeras imágenes tomográficas. Como principio algebraico, son operaciones simples de emplear, en donde se superpone una malla o cuadrícula imaginaria sobre el plano de la sección transversa del objeto, cada celda representa un promedio de densidad que finalmente son las incógnitas del problema. Las proyecciones representan las direcciones que atraviesan las cuadrículas en distintos ángulos como bandas delgadas que a su vez representan el haz de rayos x que atraviesan el objeto, en conclusión, la suma de cada banda que forma una proyección es multiplicado por el valor promedio de densidad de cada celda. Cabe mencionar algunos conceptos básicos empleados en la reconstrucción de imágenes en TAC, como punto de partida para entender lo procesos empleados para optimizar la calidad de imagen, reducir los tiempos de escaneo, donde se requiere métodos de reconstrucción cada vez más complejos y que pueden tener un alto costo computacional, éstos métodos se pueden clasificar en métodos analíticos, métodos matemáticos y métodos estadísticos de reconstrucción. La geometría del haz del rayo (fan-beam), los algoritmos de reconstrucción para obtener imágenes a través de un sistema de ecuaciones lineales que se pueden expresar en forma matricial. Los detectores son los que miden la energía depositada en ellos después de ser impactados por los fotones de rx que han atravesado el objeto, ésta energía se transforma en energía eléctrica que finalmente llega al ordenador la cual es cuantificada [9]. Los primeros equipos utilizaban un solo detector, en la actualidad se usan más 2400 detectores, los cuales han mejorado su eficiencia y definiendo su generación:

- Detector de cristal de centelleo (1era generación)

- Detector de gas o de cámara de ionización (3ra generación)
- Detectores de estado sólidos o detectores semiconductores (equipos de 3ar generación en adelante y en TAC helicoidal)

Una vez se completa un barrido del objeto, el sistema de adquisición de datos (DAS, Data Acquisition System), convierte las señales procedentes de los detectores en datos digitales y las transmite al ordenador. Para la reconstrucción de imágenes es necesario que el ordenador reciba múltiples señales en diferentes ángulos [10].

El fundamento matemático de la reconstrucción de imágenes en TAC, es el algoritmo de reconstrucción, que pueden ser uno de los siguientes métodos:

- Retroproyección simple
- Retroproyección filtrada
- Transformada de Fourier
- Métodos iterativos

Cada uno de éstos métodos, ofrecen distintas perspectivas de reconstrucción de imágenes, y se diferencian entre sí, con características de calidad imagen variadas según la complejidad del método. Éstos serán descritos con más detalle dentro del marco teórico. Por otro lado, los niveles de atenuación del objeto atravesado, representan una capa interna del mismo, donde se calcula su valor de atenuación el cual corresponde un nivel de gris del pixel. Cada pixel está asignado a un valor numérico que corresponde a un valor promedio de la atenuación correspondiente del vóxel o unidad de volumen. Utilizando como referencia el valor de atenuación del agua, éste valor es comparado, con una escala de unidades arbitrarias llamada unidades Hounsfield.

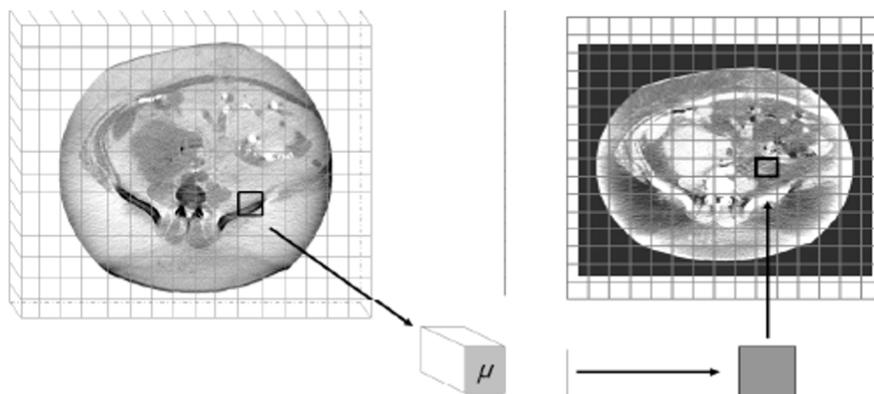


Figura 1: Rebanada Anatómica Volumétrica Vóxel

Tomada de: [11]

En ésta escala asigna al agua un valor de atenuación=cero, la escala Hounsfield tiene un rango de 2000 unidades, donde cada uno representa el valor de atenuación de un tejido determinado y el negro absoluto es de -1000 y el blanco absoluto es +1000 [10].

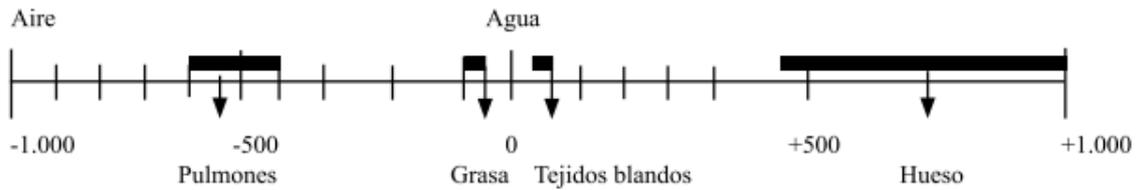


Figura 2: Representación gráfica de la escala de Hounsfield

Tomada de: [10]

Hueso	+400 a +1.000
Tejidos blandos	+40 a +80
Agua	0
Grasa	-60 a -100
Pulmones	-400 a -600
Aire	-1000

Tabla 1: Valores de Atenuación para tejidos frecuentes

Tomado de [10]

Otro aspecto importante que hacen parte de la reconstrucción de imágenes es la definición del campo de visualización o Field Of View (FOV) que se define como el volumen que resulta de la intercepción entre todos los haces proyectados entre la fuente y el detector en todas las posiciones angulares, es necesario limitar el FOV del escáner lo que permite la reconstrucción del objeto dentro estos límites [10].

4.1. Arquitecturas de sistemas computacionales

Teniendo en cuenta las características del procesamiento de las imágenes y en especial obtener un rendimiento óptimo del sistema a través de códigos eficientes, determinan el hardware como herramientas CAP. Se tiene cuatro tipos de computadores de altas prestaciones de acuerdo a la forma de manipular las instrucciones:

- **Máquinas SISD.** Las CPU convencionales, ejecutan instrucciones secuenciales, las cuales trabajan con instrucciones no relacionadas y actúan sobre diferentes conjuntos de datos.
- **Máquinas SIMD.** Están compuestos por un gran número de unidades de procesamiento que ejecutan las mismas instrucciones sobre diferentes conjuntos de datos. Lo que permite trabajar con datos en paralelo.
- **Máquinas MISD.** Aunque son máquinas teóricamente funcionales, ejecutan diferentes instrucciones sobre un único conjunto de datos.

- **Máquinas MIMD.** Éstas máquinas ejecutan varias instrucciones en paralelo sobre diferente conjunto de datos, en comparación con los SIMD, las instrucciones y los datos están relacionados, pero de distintas tareas, lo que le permite ejecutar varias subtarefas en paralelo, logrando una optimización en tiempos totales de ejecución [5].

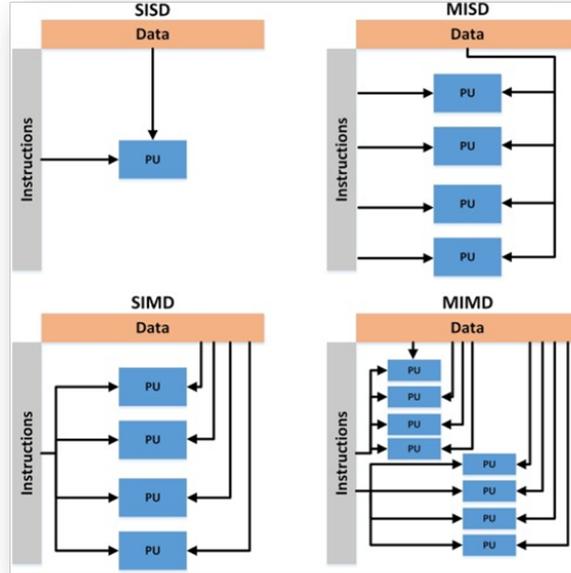


Figura 3: Arquitectura de sistemas computacionales

Tomado de: [12]

4.2. Reconstrucción de imágenes

Las fórmulas matemáticas para reconstruir una imagen tridimensional a partir de múltiples imágenes axiales fueron desarrolladas, por Johann Radon. La transformada bidimensional de Radon, es una transformación de la integral que consiste en la integral de la función sobre un conjunto de rectas.

Por ejemplo, si una línea se representa por la función $x\cos\beta + y\sin\beta = s$, donde s es la mínima distancia desde la recta al origen y β es el ángulo que forma el eje x con el vector posición del punto de la recta más cercano del origen, se tiene entonces[13]:

$$P(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x\cos(\theta) + y\sin(\theta) - s)dx dy \quad (1)$$

Siendo P las proyecciones que producen el objeto cuya imagen en $f(x, y)$.

Con el propósito de calcular la imagen a partir de las proyecciones es necesario calcular la transformada inversa de Radon en el caso bidimensional[13].

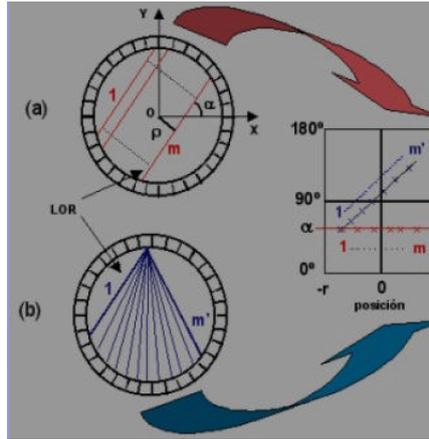


Figura 4: Generación del sinograma

Figura 5: Tomada de: [1]

4.3. Obtención de sinograma

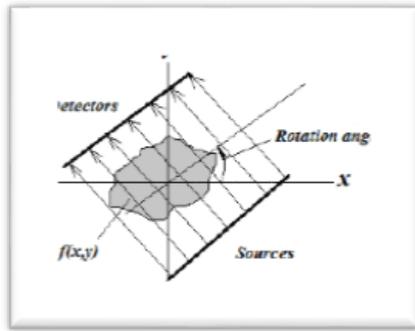
Para facilitar el tratamiento de datos tomográficos se realiza una representación ordenada de estos para facilitar el posterior procesamiento.

Se obtiene un sinograma como una representación gráfica de una matriz, en la que el índice de las filas depende del ángulo que forma con la línea media con el eje x y el índice de las columnas depende de la distancia de la línea media al centro de coordenadas del sistema de detección. Según esta representación todas las líneas de medida, con la misma inclinación [13].

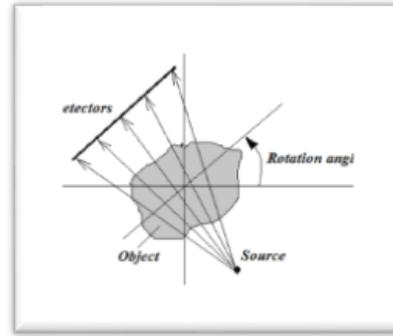
4.4. Principios matemáticos de reconstrucción de imágenes

En la obtención de imágenes a través de los datos generados del interior de un objeto, existen dos tipos de proyecciones, las proyecciones paralelas que se pueden calcular por medio de la transformada de Radon de la imagen y las proyecciones tipo fanbeam o haz en forma de cono, las que se obtienen por la transformada inversa de Radon que representan la imagen en sí.

En las proyecciones paralelas dependen de varias fuentes de radiación y se proyectan hacia los detectores, las proyecciones fanbeam después de atravesar el objeto, dependen de una sola fuente de radiación que atraviesan al objeto y llegan a los detectores como se puede observar en las siguientes imágenes:



(a) Proyecciones paralelas



(b) Proyecciones Fanbeam

Tomada de: [11]

Figura 6: Proyecciones de una TAC

Teniendo en cuenta el comportamiento de las proyecciones sobre el objeto y la antes mencionada rejilla o cuadrícula donde esta mide n celdas por lado, entonces el número total de celdas corresponde a $n \times n = N$.

En la trayectoria de los rayos en forma de bandas a través del objeto en forma paralela y realizando angulaciones con respecto a los ejes de la cuadrícula, se tiene que el rayo en forma de banda que cruza la cuadrícula será j_i . se puede definir la proyección p del rayo j_i como:

$$\sum_{j=1}^N W_{ij} f = p_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2)$$

M , es el número total de rayos, en todas las proyecciones y W_{ij} , corresponde a la fracción área de cada celda interceptada por el rayo en especial. Como se muestra en la figura 3, el triángulo representa ésta área, como se puede apreciar la mayoría de los factores W_{ij} son iguales a cero.

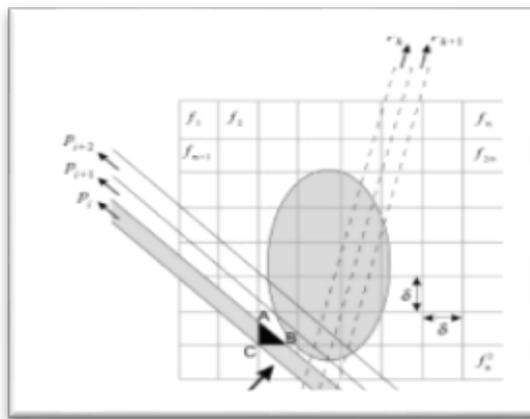


Figura 7: Proyección representada por una banda sobre una cuadrícula.

Tomada de: [11]

La ecuación correspondiente al área del triángulo está definida por:

$$W_{ij} \text{ para la celda} = \frac{\text{el \u00e1rea de ABC}}{\delta^2} \quad (3)$$

Con la soluci\u00f3n del problema, se puede decir que es en principio la obtenci\u00f3n de una tomograf\u00eda, habiendo determinado los valores de f , W_{ij} , M , como el n\u00famero total de rayos incidentes y a N , como el tama\u00f1o de la cuadr\u00edcula. Aun as\u00ed, es eficiente con matrices relativamente peque\u00f1as, por ejemplo si se tiene un arreglo de $256 \times 256 = 65.536$, si a esto se le a\u00f1ade el ancho de un rayo incidente que generalmente es de la misma longitud de las celdas $M=N$, lo que corresponde a 256×256 p\u00edxeles, por lo cual se debe resolver $65,536 \times 65,536 = 4,29 \times 10^9$ ecuaciones simult\u00e1neas, lo que implica un alto costo computacional, adem\u00e1s de la alta capacidad de memoria de almacenaje, si por cada celda de la matriz requiere 8 bits, para un total de $8 \times 4,29$ Gigabytes, estos c\u00e1lculos toman demasiado tiempo de resoluci\u00f3n, aunque se pueden emplear m\u00e9todos iterativos que pueden ahorrar tiempo de procesamiento.

En comparaci\u00f3n con los primeros trabajos desarrollados por Hounsfield, quien obtuvo una matriz de 80×80 p\u00edxeles de resoluci\u00f3n tom\u00f3 9 d\u00edas de procesamiento, claramente las t\u00e9cnicas de adquisici\u00f3n de datos y calculo han mejorado y a\u00fan siguen siendo objeto de estudio, para optimizar los tiempos, los costos computacionales, la calidad de imagen, reducci\u00f3n de ruido entre otros factores primordiales en reconstrucci\u00f3n de im\u00e1genes en tomograf\u00eda axial computada. Actualmente, las implicaciones matem\u00e1ticas y de an\u00e1lisis para el desarrollo de m\u00e9todos de reconstrucci\u00f3n, para obtener la imagen de una capa interior, se utilizan rayos-x que atraviesan el objeto. Teniendo en cuenta las proyecciones paralelas y fan-beam, sobre el flujo de los rayos x, el proceso de escaneo se repite para diferentes \u00e1ngulos. Los detectores son los que capturan los rayos-x atenuados, de esta forma se obtiene un conjunto de datos que se utilizan para obtener la imagen de la estructura interna del objeto [13].

4.5. M\u00e9todos Anal\u00edticos

La mayor\u00eda de los esc\u00e1neres en el mercado basan sus procesos de reconstrucci\u00f3n en m\u00e9todos anal\u00edticos, entre los cuales el algoritmo de retroproyecci\u00f3n filtrada “Filtered-Back-Projection” (FBP), es el m\u00e1s reconocido, \u00e9ste se utiliza para la implementaci\u00f3n la transformada de Radon.

La FBP, ser\u00eda el m\u00e9todo de reconstrucci\u00f3n ideal puesto que puede aprovechar las infinitudes de proyecciones y los datos obtenidos con los rayos-x y sin ruido, la reconstrucci\u00f3n del problema es ideal. En la pr\u00e1ctica solo se obtiene un numero finito de medidas e igual n\u00famero de rotaciones del esc\u00e1ner, lo que adem\u00e1s representa una cantidad considerable de ruido por las condiciones f\u00edsicas de la medici\u00f3n.

\u00c9stos errores pueden pasar desapercibidos en estudios rutinarios cerebrales, pero en presencia de objetos de alta atenuaci\u00f3n o proyecciones incompletas, los artefactos afectan la imagen. Es cuando en la fase inicial de los datos en la obtenci\u00f3n de las proyecciones se pueden aplicar filtros logrando reducir dichos artefactos.

4.6. Transformada de Radón

Los rayos-x pasan a través de un objeto, se observa que la intensidad de los rayos disminuye de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$I = I_0 e^{(-\mu x)} \quad (4)$$

Donde I_0 es la intensidad del rayo inicial, I es la intensidad al pasar la distancia x a través del objeto. El coeficiente de atenuación μ depende de la densidad del material ρ y del número atómico Z .

$$\mu = \mu(\rho, Z) \quad (5)$$

Si los rayos-x pasan a través de varios medios, el decrecimiento relacional está dado por la fórmula:

$$\frac{I}{I_0} = \exp\left(-\sum_j \mu_j x_j\right) \quad (6)$$

Si $\mu = \mu(x)$ es una función continua de x , el sumatorio se puede expresar como una integral de línea a lo largo del paso del rayo:

$$\frac{I}{I_0} = \exp\left(-\int_L \mu_j x_j\right) \quad (7)$$

Si se considera la sección transversa de un objeto tridimensional. Sea la sección transversa perpendicular al eje z , el coeficiente de atenuación en el plano es una función de dos variables:

$$\mu = \mu(x, y) \quad (8)$$

y el decrecimiento racional del rayo-x a través del plano xy a lo largo de la línea L está dado por la siguiente formula:

$$\frac{I}{I_0} = \exp\left(-\int_L \mu(x, y) ds\right) \quad (9)$$

Al mover la fuente del rayo y el detector, es posible tener un conjunto de proyecciones.

La proyección $R(\theta, s)$ de un objeto inicial se define como el conjunto de integrales de línea de la intensidad de la imagen, presentada por $f(x, y)$, a lo largo de las líneas l , a una distancia s del origen del sistema de coordenadas y formando un ángulo con el eje x .

$$R(\theta, s) = \int_L f(x, y) dl \quad (10)$$

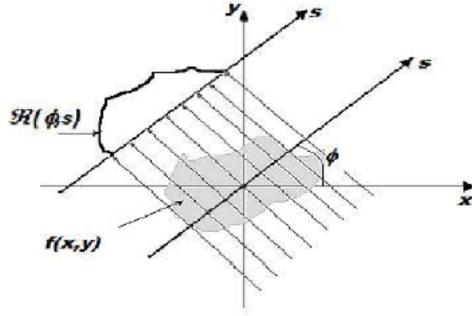


Figura 8: Proyección $R(\theta, s)$ para un ángulo θ , proyecciones paralelas

Tomada de: [13]

Un conjunto de proyecciones tomada de diferentes ángulos, representa la imagen y se conoce como la transformada de Radon. Ésta transformada en \mathbb{R}^2 , se puede representar así:

$$(x(t), y(t)) = t(\sin\theta, -\cos\theta) + s(\cos\theta, \sin\theta) \quad (11)$$

La función $f(xy)$, representa la imagen original y se puede calcular mediante la inversa de la transformada de Radon, en forma simbólica:

$$f(xy) = \mathcal{R}^{-1}(\hat{f}) \quad (12)$$

Uno de los métodos de calcular la transformada inversa de Radon se conoce como el método directo de Fourier.

4.7. El teorema de corte Fourier

El punto a seguir es reconstruir el fantoma. Para éste propósito se hace un repaso para la teoría de corte, se escribe la transformada bidimensional de Fourier de la función $f(xy)$, que representa al objeto.

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{2\pi i(ux+vy)} dx dy \quad (13)$$

Además de escribe la transformada de la proyección:

$$P_{\theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t\cos(\theta) - s\sin(\theta), s\cos\theta + t\sin\theta) e^{2\pi i\omega t} ds dt \quad (14)$$

El teorema nos dice, la transformada de Fourier de una proyección paralela de una imagen $f(xy)$, tomada a un ángulo θ nos da un corte de la transformada bidimensional $F(u, v)$ a lo largo de la línea BB.

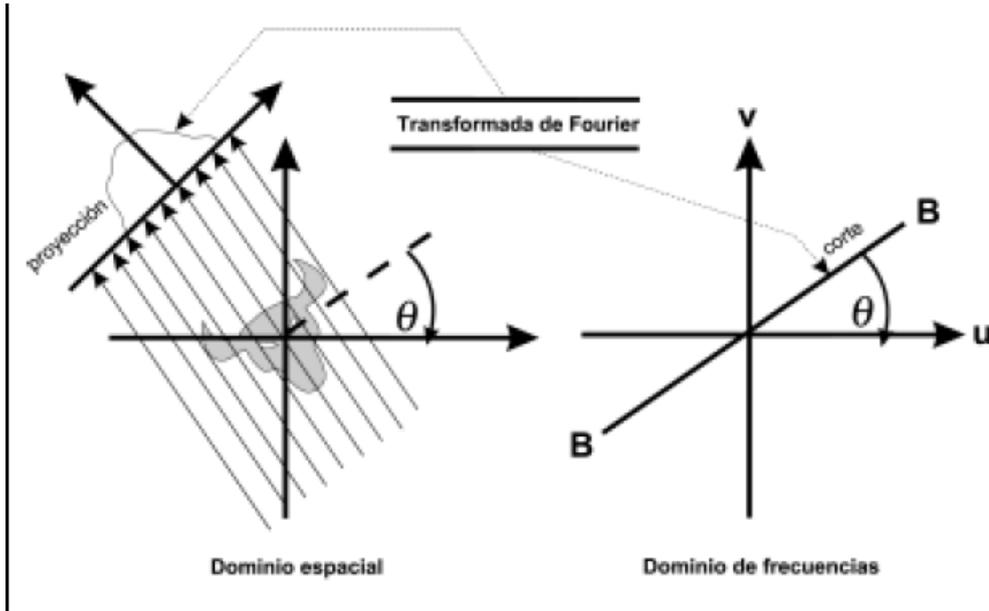


Figura 9: Representación esquemática del teorema de corte de Fourier

Tomada de: [14]

La utilidad del teorema radica que tomando las proyecciones de un objeto a ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_k$ y tomando la transformada de Fourier de las mismas, podemos determinar los valores de la transformada bidimensional $F(u, v)$ en líneas radiales del plano uv (dominio de frecuencias espaciales).

Si se puede tomar un número infinito de proyecciones, entonces conoceríamos $F(u, v)$ en todo el plano y tomando su transformada inversa encontraríamos la imagen en $f(xy)$ del objeto.

La transformada inversa está dada por:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(ux+vy)} dudv \quad (15)$$

4.8. Algoritmo de retroproyección filtrado

El algoritmo implica dos pasos: la parte del filtraje y la de retroproyección. Para su instrumentación computacionales se requiere escribir la transformada de Fourier inversa en coordenadas polares y recomponer los límites de integración.

Luego, se reconstruye la imagen a partir de las proyecciones filtradas, calculando la segunda integral:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} P_{\theta\omega}(x\cos\theta + y\sin\theta) d\theta \quad (16)$$

Por último, se reconstruye la imagen a través de un algoritmo de retroproyección filtrada esto es, calcular la segunda integral, efectuándose numéricamente, lo que implica básicamente ir sumando las contribuciones de cada proyección a la intensidad de cada

pixel (x, y) . Como no todo el plano x - y es cubierto, se requiere una interpolación lineal unidimensional para calcular la aproximación a $P_{\theta\omega}(x\cos\theta + y\sin\theta)$.

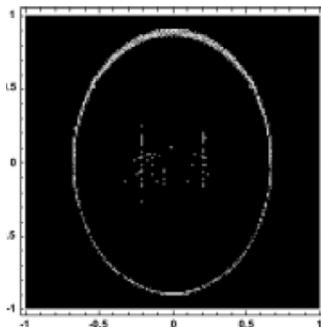


Figura 10: Resultado de integración de proyecciones, Reconstrucción tomográfica

Figura 11: Tomado de: [2]

La reconstrucción de imágenes por métodos analíticos, pueden ser fáciles de implementar en cualquier arquitectura computacional, con una velocidad de procesamiento considerable y con resultados óptimos, sin embargo, en muchos procedimientos la calidad de imagen no es aceptable por la presencia de ruidos, artificios o artefactos los cuales no permite su eliminación de las imágenes. Ahora analizaremos los siguientes métodos algebraicos de reconstrucción y definiremos sus principales ventajas y desventajas con respecto a los métodos analítico. Finalmente se establecerá el mejor procesamiento para la reducción de artificios y artefactos en la imagen.

4.9. Métodos algebraicos de reconstrucción

Como ya hemos visto los métodos analíticos son ampliamente utilizados en los procesos de reconstrucción de imágenes por su facilidad de implementación, rapidez de aplicación, entre otros. Las ya mencionadas transformada inversa de Fourier, las (FBP) retroproyección filtrada ofrecen mecanismos eficientes y aun bajo costo computacional.

Sin embargo, los métodos algebraicos representan una gran opción debido a dos razones. La primera, los métodos analíticos requieren una colección completa de datos, lo que en la práctica no es posible, como parte del problema de éste trabajo se enfoca en estudios que presentan artificios o artefactos de diferente índole. Segundo, estos métodos no ofrecen una reconstrucción óptima en condiciones de ruido. Con los métodos algebraicos bajo las mismas condiciones ofrecen reconstrucciones de alto contraste y precisión con un número menor de proyecciones lo que también implica menos dosis proporcionada al paciente [4].

En la práctica algunos estudios de tomografía (TC), presentan proyecciones incompletas o proyecciones no equiespaciadas, por lo que los métodos algebraicos hacen posible una reconstrucción de imágenes con mejor calidad de imagen [8].

4.10. Reconstrucción por métodos iterativos

Los algoritmos iterativos, proponen que un objeto f^i , por ejemplo, con distribución homogénea de atenuaciones. A continuación, se le calculan las proyecciones p^i , correspon-

dientes al objeto y se compara con las proyecciones originales medidas en el proyector p^0 . El objeto $f^i + 1$ se actualiza, con base a la diferencia de proyecciones. Matemáticamente se puede expresar así:

$$p^i = A \times f^i + e \quad (17)$$

Donde A corresponde a una matriz que depende de la geometría del sistema, la respuesta del detector y otros parámetros físicos del tomógrafo en cuestión, e corresponde al error incluido por el ruido. Con este proceso iterativo, se produce una secuencia de distribuciones de atenuación $f^1, f^2, f^3, \dots, f^n$, hasta que se converge a un valor óptimo f^{opt} , basado en la regla de optimización comparando p^i con p^0 .

En el método ART, se supone una distribución homogénea de atenuaciones f para iniciar el proceso de iteración y se ignora la naturaleza y se ignora la naturaleza estadística del problema. El proceso iterativo se puede ejemplificar en la Figura 12.

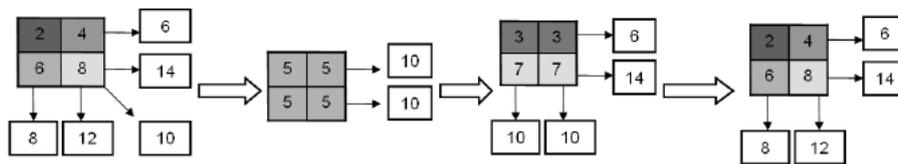


Figura 12: Ejemplo del método ART en una matriz 2*2

Tomado de: [10]

Un objeto compuesto por 4 atenuaciones distintas (2,4,6,8), es proyectado en 3 ángulos diferentes $\theta=0^\circ, 45^\circ$ y 90° , obteniendo 5 valores (cuadros blancos). Para la reconstrucción, solo se cuentan con las proyecciones, que indican que hay un total de "20 HU" (2+4+6+8) para distribuir en 4 píxeles. Se empieza por asumir que la distribución es homogénea (5 HU por píxel). Cuando se compara las proyecciones con las filas, se observa que sobran 4 HU en la primera fila y faltan 4 HU en la segunda. De nuevo se asume que las filas [8] se distribuyen homogéneamente (iteración 1). Para este momento, se observa que los valores de las filas ya satisfacen el valor de las proyecciones que se miden en las filas (6 HU y 14 HU); pero se observa las proyecciones de las columnas, se notan algunas diferencias. Análogamente a la iteración 1, se asume que la distribución es uniforme, con lo que cada elemento de la primera columna se le resta 1 HU, mientras se le suma 1HU a la segunda. Como resultado se obtiene una distribución de atenuaciones estimada del objeto, cuyas proyecciones satisfacen aquellas que se habían medido en el detector.

Uno de los métodos estadísticos empleados para resolver el problema de la reconstrucción de imágenes por procedimientos iterativos, es el de Máxima Verosimilitud (MV). Este comienza expresando el máximo a posteriori (MAP) que se basa en la regla de Bayes:

$$\left(\frac{f}{p} \right) = \frac{P\left(\frac{f}{p} * P(f) \right)}{P(p)} \quad (18)$$

Donde, dado el conjunto de proyecciones p, debe encontrarse la distribución de atenuaciones f que maximice la probabilidad $P(f/p)$. Cuando no se tiene información a priori acerca

de la imagen (lo que elimina el termino $P(f)$ y se omite el termino $P(p)$ asumiendo que es independiente de f , el problema se reduce a optimizar $P(f/p)$ y se obtiene precisamente el método MV.

Ahora si se asume las variaciones estadísticas son mutuamente independientes. La probabilidad P puede ser escrita de la siguiente manera:

$$P\left(\frac{f}{p}\right) = \prod_{i=1}^I P\left(\frac{p_i}{f}\right) \quad (19)$$

Actualmente existe un interés en utilizar la reconstrucción iterativa en tomografía, donde numerosos grupos de investigación emplean diferentes estrategias para implementar de manera rápida. En general, se pueden identificar tres enfoques: mejora en los algoritmos, la utilización de Hardware dedicados a tarjetas gráficas o en procesamiento en paralelo.

Otro ejemplo, lo podemos aplicar a una matriz 3x3 con nueve incógnitas y que puede ser resuelta con doce valores de medición.

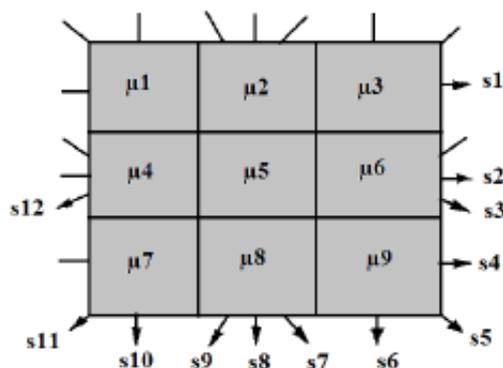


Figura 13: Sistema de 12 ecuaciones y 9 incógnitas

Tomado de: [9]

Las dimensiones de la matriz A crecen proporcionalmente con la resolución de la imagen que se va a reconstruir y al número de proyecciones, elevando de esta forma el coste computacional, por lo que necesario implementar mecanismos paralelos de algoritmos más eficientes de reconstrucción para reducir el tiempo de computo. Para un ángulo dado, se asume que el número de proyecciones varía de 1 a m (siendo m el número de detectores). Si tomamos k en diferentes ángulos, entonces p es el vector columna con m, k elementos, x es una matriz columna con n^2 elementos.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} \\ \dots \\ P_{m1} \\ \dots \\ P_{mk} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{nn} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Y la matriz A es una matriz rectangular con las dimensiones $mk_x n^2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}(11) & a_{12}(11) & \dots & a_{nn}(11) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11}(m1) & a_{12}(m1) & \dots & a_{nn}(m1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11}(mk) & a_{12}(mk) & \dots & a_{nn}(mk) \end{bmatrix} \quad (21)$$

La matriz A puede ser calculada de diferentes formas, para éste caso se empleará el método de Siddon para calcular los elementos de la matriz en una cuadrícula rectangular [10].

4.11. Métodos de Siddon

Para el cálculo de los pesos a_{ij} de la matriz A, Robert Siddon [15] propuso un algoritmo cuya idea básica consiste en hacer los pesos proporcionales a la longitud de línea que atraviesa el píxel.

El método se ilustra en la Figura 14 donde se presenta un rayo que atraviesa una imagen discretizada entre los puntos P1 y P2.

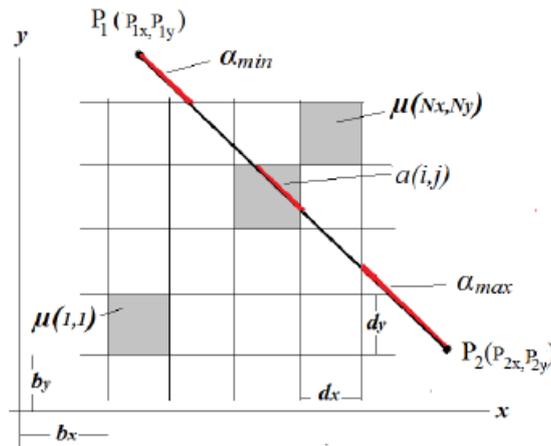


Figura 14: Ilustración del algoritmo de Siddon

Tomado de: [15]

Los factores del píxel (i,j) se denota por $a(i,j)$ y son iguales a la longitud de la intersección del rayo con el píxel (i,j) en la Figura 14 N_x y N_y , representan el número de planos perpendiculares a los ejes x y y, α_{min} y α_{max} , denota la distancia entre P1 y el primer plano interceptado (α_{min}) y la distancia entre el último plano interceptado y el punto P2 (α_{max}). El valor de a_{ij} para una proyección se presenta en la Figura 15.

De esta forma, la integral de línea del punto P1 al punto P2 en forma discreta puede ser expresada mediante la ecuación:

$$P_{12} = \sum_{ij} a(i, j)\mu(i, j) \quad (22)$$

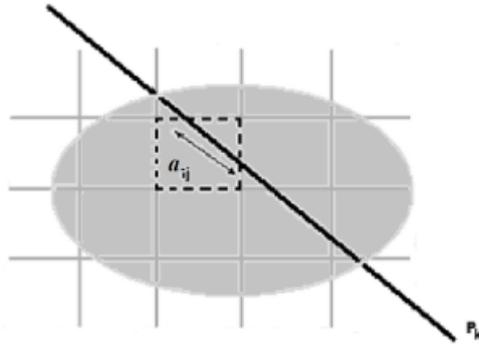


Figura 15: El valor $a(i,j)$ de la proyección P_k, θ_r

Tomado de: [3]

En la figura anterior $\mu(i, j)$ representa el valor del píxel que corresponde la intensidad de la imagen (atenuación). Sería muy ineficiente evaluar la ecuación para todos los índices i, j , pues la mayoría de los valores de $a(i, j)$ son ceros. La mejor forma es seguir el rayo al pasar el punto P1 a P2.

En éste caso el algoritmo de Siddon se emplea generar los elementos de la matriz del sistema. A que simula el proceso de escaneo de la imagen. La matriz se calcula una vez y está asociada a las características del escáner empleado. Una vez generada para una imagen de una resolución determinada, la matriz se usa para la resolución iterativa del sistema. En la figura 15 se muestra el esquema del proceso de escaneo de una imagen. La fuente de rayos X gira alrededor del centro del objeto emitiendo rayos cuya intensidad atenuada llega a los detectores del escáner [15].

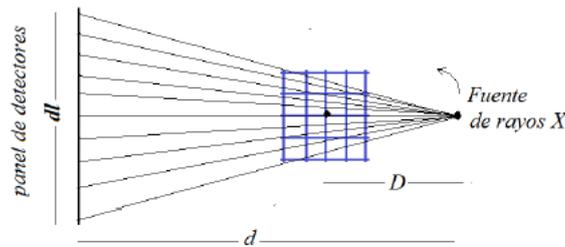


Figura 16: Esquema de escaneo de un objeto por Rayos-X

Tomado de: [3]

4.12. Algoritmo de Siddon

Entrada: N_d – Número total de detectores, N_z – número de ángulos en que se toman las medidas, D - distancia de la fuente de rayos-X hasta el centro de la imagen, d - distancia de la fuente al panel de detectores, d_l -longitud del panel de detectores.

Salida: En la salida el algoritmo genera la matriz de del sistema A_{N_x3} almacenada en el formato coordinado ordenado por filas disperso (COO):

- En la primera columna se registra el número de fila del elemento no nulo de la matriz A. las filas están ordenada de menor a mayor.
- En la segunda columna se indica el número de columna del píxel con el valor no cero.
- En la tercera columna se indica el valor del elemento no nulo. N NZ indica el número total de elementos no nulos.

La aplicación de este método ayuda a la implementación de la simetría de la estructura de datos, se puede ayudar a ahorrar la memoria del sistema y también disminuir el tiempo de reconstrucción debido a que leer una matriz completa es más costoso que utilizar la matriz mínima (en el rango de 0-45) para completarla internamente [16].

En el siguiente flujograma se resume el proceso del algoritmo de Siddon desde la entrada hasta la salida:

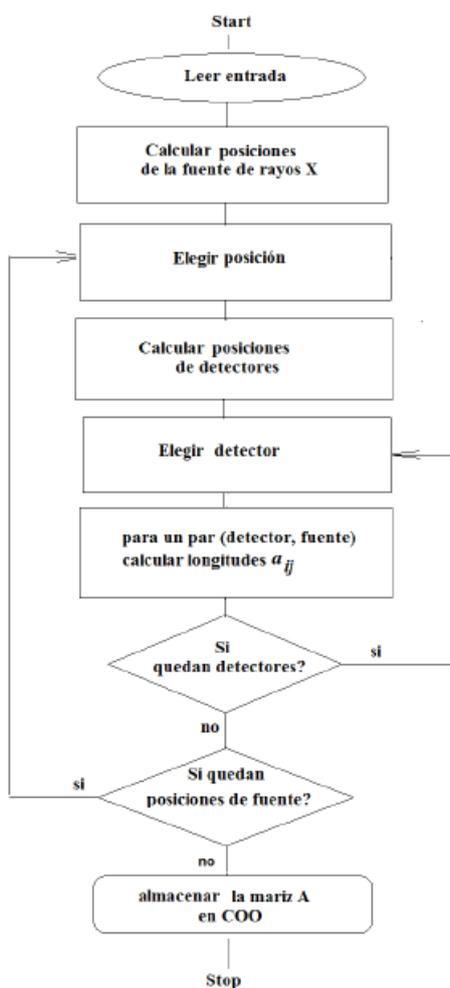


Figura 17: Flujograma del algoritmo de Siddon

Tomado de: [15]

4.13. Singular Value Decomposition

La descomposición de una matriz en valores singulares es una extensión de la diagonalización de una matriz real A $m \times n$. Teniendo en cuenta que existen matrices ortogonales $V(m)$, y $U(n)$ y una matriz diagonal de tamaño $(m \times n)$, se puede expresar que:

$$A = U\Sigma V^T \quad (23)$$

Esta factorización de A se llama descomposición en valores singulares de la matriz A . (Singular Value Decomposition SVD) [14].

Éste es un algoritmo resulta ser muy útil a la hora de reducir el peso de los datos de una imagen, comprimiéndola al tamaño que se desee, a menor número de valores singulares es menor el peso de la imagen resultante, lo que ayuda a optimizar éste algoritmo es que omite todos los valores nulos de la imagen, para el caso de una tomografía computada, los valores nulos hacen referencia a cada valor que no esté contemplado en la escala de grises.

4.14. Machine Learning

La inteligencia artificial es la rama de la computación, en la cual se pueden ejecutar de manera automática procesos analógicos básicos como respuesta a una entrada con su respectiva salida mediante una lógica programada. El machine learning, como parte de la inteligencia artificial se encarga de generar algoritmos que tienen la capacidad de aprender evitando la programación continua, lo que se requiere es alimentar con datos el algoritmo para que aprenda y tenga alternativas de decisión autónoma [17].

El aprendizaje automático es un método científico que permite usar ordenadores con capacidad computacional para que aprendan y extraigan patrones y a correlacionarlos por si solos. Estos patrones se pueden usar luego para predecir comportamientos lo que facilita toma de decisiones, esto es posible a través de análisis información llamados “datos de entrenamiento” [18].

4.15. Maquinas de soporte vectorial (SVMs)

Una máquina de soporte vectorial aprende la superficie de decisión de dos distintas clases distintas de los puntos de entrada. Los datos son mapeados por medio de un Kernel Gaussiano, u otro tipo de Kernel, a un espacio de características en un espacio dimensional más alto, donde se busca la máxima separación entre clases [2].

La teoría del SVM está basada en la idea de minimización de riesgo estructural, donde su aplicación se ha destacado con un gran desempeño como son las redes neuronales y han sido introducidas como una gran herramienta para resolver problemas de clasificación, [2] puesto que está basado en el principio de minimización de riesgo estructural (SRM “Structural Risk Minimization”) [19].

El SVM resuelve un problema cuadrático donde el número de coeficientes es igual al número de entradas o datos de entrenamiento, otra definición acorde es que el SVM, es un sistema para entrenar máquinas de aprendizaje lineal eficientemente tanto que para la

clasificación como para la regresión se ha encontrado muchas aplicaciones como clasificación de imágenes, reconocimiento de caracteres, clasificación de patrones, identificación de funciones, etc [19].

4.15.1. SVM para regresión

El objetivo del SVM es encontrar una función $f(x)$ que tenga a lo más una desviación ϵ de la salida y_i para todos los datos de entrenamiento y al mismo tiempo, que sea lo mínima posible. Lo que no se toma en cuenta los errores menores ϵ , sólo de aquellos que son mayores [19].

Los que se busca con el SVM para regresión, es realizar un mapeo de los datos de entrenamiento $x \in X$, a un espacio de mayor dimensión F a través de un mapeo no lineal $\phi : X \rightarrow F$, donde se puede realizar la regresión lineal. Los vectores de soporte de los que depende todos los datos que contienen la mayor información posible [19].

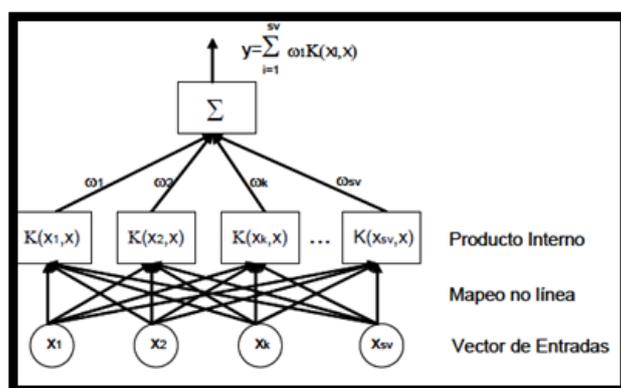


Figura 18: Arquitectura de SVM para regresión

Tomado de: [1]

4.15.2. SVM para clasificación

Para construir un hiperplano que separe dos clases, etiquetadas $y \in -1, +1$, de forma que la distancia entre el hiperplano óptimo y el patrón de entrenamiento más cercano margen se la máxima [20]. Dentro de los problemas de clasificación de encuentra el caso linealmente separable y el caso no linealmente separable.

Caso Separable

Supongamos que se tiene de S puntos etiquetados para entrenamiento como se muestra en la Figura 19.

$$(y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n) \quad (1)$$

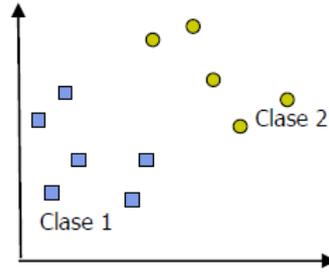


Figura 19: Caso linealmente separable

Tomado de: [1]

Cada punto de entrenamiento pertenece alguna de las dos clases y se le ha dado una etiqueta $y \in -1, +1$, en ocasiones la búsqueda de un hiperplano adecuado en un espacio de entrada es demasiado restrictivo para ser práctico, una solución a éste problema es mapear el espacio de entrada en espacio de características mayor [19].

La definición general es, en un espacio p-dimensional, un hiperplano es una variedad afín plana (p-1) dimensional. Cuya ecuación general puede ser expresada como [1]:

$$w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_px_p + b = 0 \quad (24)$$

La clasificación binaria se utiliza con función de valores reales, $f : XCR^n \rightarrow R_i$ de manera que a los datos de entrada $x = (x_1, \dots, x_n)'$ se asigna a la clase positiva si $f(x) \geq 0$ y en caso contrario, la clase negativa [1].

Caso no linealmente separable

Cuando el conjunto S no es linealmente separable, se deben sobrepasar las restricciones en la formulación de la SVM [19].

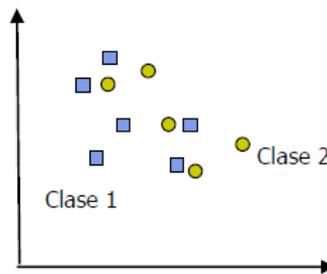


Figura 20: Caso no linealmente separable

Tomado de: [1]

La función de decisión generalizada está definida por:

$$f(x) = \text{sign}(w, z + b) = \text{sign} \sum_{i=1}^l (a_i y_i z_i \cdot z + b) \quad (25)$$

Existe una manera de tratar los casos no lineales a través de un Kernel, donde resuelve las variables desconocidas de las funciones dentro de un hiperplano, donde no es necesario tener conocimiento acerca de ψ . Solo se requiere la aplicación de la función Kernel, K que calcule el producto punto de los puntos de entrada en el espacio de característica Z, teniendo [19].

$$Z_i \cdot Z_j = \psi(X_i) \cdot \psi(X_j) = K(X_i, X_j) \quad (26)$$

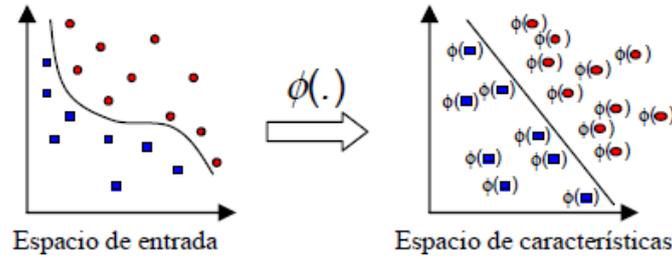


Figura 21: Idea del uso de un Kernel, para la transformación del espacio de los datos

Tomado de: [1]

Los métodos Kernel obtienen una solución lineal en el espacio de características (que se convierte en una solución no lineal en el espacio de entrada) [21]. Podremos implementar para cada función un Kernel K (.,.) específico según sus parámetros de entrenamiento.

KERNEL TIPICOS

- Lineal

$$K(X_i, X_j) = X_i^T \cdot X_j \quad (27)$$

- Polinómico (Parámetros p y c)

$$K(X_i, X_j) = (X_i^T \cdot X_j + C)^p \quad (28)$$

- Gaussiano (Parámetro σ^2)

$$K(X_i, X_j) = \exp\left(-\frac{\|X_i - X_j\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (29)$$

Para completar el clasificador en una SVM con Kernel Gaussiano, habitualmente se emplea un **cross-validation** [21].

En conclusión, el uso de la función Kernel hace posible realizar el mapeo de la información de entrada (x,z) al espacio de características $(\psi(x), \psi_i(z))$, de forma implícita y entrenar la máquina lineal en dicho espacio[21].

4.16. Validación Cruzada

Dentro de las técnicas de validación de datos en un entrenamiento de máquina, se obtiene mediante modelos físicos teóricos o con simulaciones a través de los métodos de validación hold-out y k-fold [22].

Cuando la cantidad de datos para entrenamiento y prueba es limitada, se puede aplicar el método de retención (hold-out), para estimar el error [23] el objetivo es el uso adecuado de todas las instancias en D para el entrenamiento de las pruebas.

4.16.1. Validación cruzada Leave-one-out

Está basada en la una matriz de confusión donde se usa un registro para probar el clasificador de validación K veces para ejecutar el algoritmo de entrenamiento a través de N iteraciones, excluyendo uno de la muestra [23] este proceso se repite hasta dejar cada una de las muestras por fuera de la matriz de confusión.

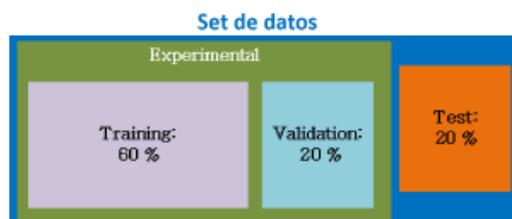


Figura 22: Separación tipo Hold-out

4.16.2. Validación cruzada k iteraciones

Esta validación k-folds consiste en dividir los datos originales en k subconjuntos y al momento de realizar el entrenamiento se va a tomar cada k subconjunto como un conjunto de prueba del modelo, mientras que el resto de subconjuntos (k-1), se tomara como conjunto de entrenamiento. Este proceso se repetirá k veces y en cada iteración se tomará un conjunto de prueba diferente [23].

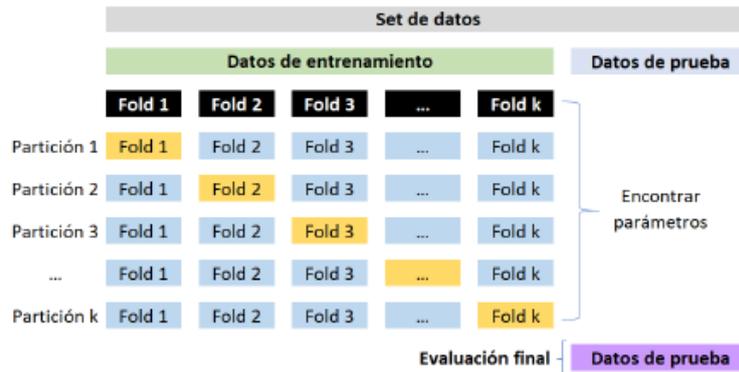


Figura 23: Validación cruzada con k-folds

4.17. Curva ROC

Las curvas ROC son empleadas para evaluar el desempeño de un método clasificatorio, de los cuales busca destacar características de eventos [11].

La Curva Característica de Operación (Receiver Operating Characteristics), representan la sensibilidad y especificidad para cada valor del umbral y que permite comparar dos o más clasificadores en función de su capacidad discriminante [24], se tiene la fracción de verdaderos positivos (TPF) y se plotea versus la fracción de falsos positivos (FPF) que esta dada por la función:

$$ROC_{(c)} = FTP_{(c)}, TPF_{(c)}; c \in -\infty, \infty \quad (30)$$

Uno de los índices para la estimación de eficacia de un sistema es el área bajo la curva ROC (AUC) cuyo valor siempre estará entre 0.5 y 1, por ello es comúnmente usada para comparar el desempeño de los marcadores, las ROC provee una descripción de la separación entre las distribuciones de positivos y negativos.

5. Metodología

La metodología incluye cuatro pasos en los cuales se hace una modificación a un set de imágenes de tomografía computarizada; la extracción de características de dichas imágenes utilizando la descomposición en valores singulares; el entrenamiento de una máquina de soporte vectorial con diferentes kernels y una validación para encontrar la validez del algoritmo propuesto.

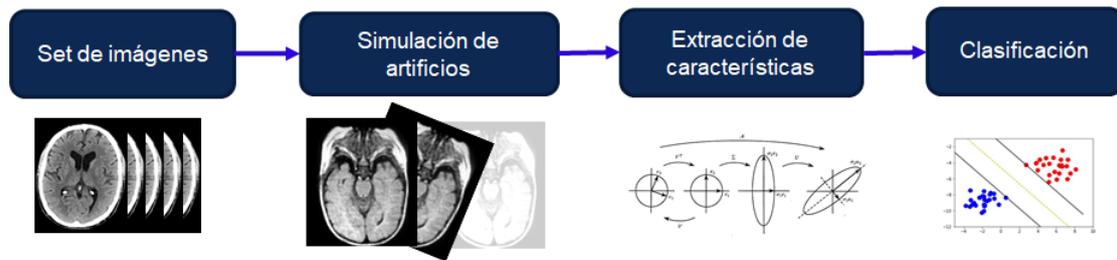


Figura 24: Metodología propuesta para la simulación y clasificación de artefactos en imágenes de TAC

Elaboración propia

5.1. Set de imágenes

Como entrada, se utilizó un set de 43 imágenes de tomografía de cráneo tomadas de diferentes sitios de internet, donde se tuvo en cuenta que las estructuras óseas estuvieran diferenciadas. Por otro lado, que estas imágenes se encontraran en los tres planos corporales: Sagital, Coronal y Axial.

5.2. Simulación de artefactos

Teniendo en cuenta que no se tiene un equipo de tomografía para realizar ensayos en imágenes con ruidos o artefactos reales, se definió aplicar diferentes algoritmos que permiten simular dichos efectos sobre imágenes de tomografía. En la práctica, existen dos tipos de artefactos que se pueden presentar en tomografía axial computada, dependiendo del origen los podemos clasificar como directos o indirectos:

Directos:

- Son generados por el paciente: movimientos voluntarios e involuntarios.
- Implantes metálicos: material de osteosíntesis, clips quirúrgicos.

Indirectos:

- Desalineamiento de los detectores
- Endurecimiento del haz del rayo
- Bajo muestreo

5.2.1. Movimiento del paciente

Una matriz de rotación es la matriz que representa una rotación en el espacio euclídeo. En dos dimensiones la matriz de rotación tiene la siguiente forma:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Donde θ representa el ángulo de rotación de la matriz. Teniendo en cuenta las propiedades algebraicas de esta matriz de transformación, se rotó cada una de las imágenes 10° con el fin de generar en la imagen original el artificio del movimiento del paciente.

5.2.2. Anillos concéntricos

Se dice que dos círculos o más son concéntricos si tienen el mismo centro pero diferentes radio.

La ecuación de un círculo con centro en (h, k) y radio igual a r , es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (32)$$

Teniendo en cuenta lo descrito en la Ecuación 31, se utilizó la rotación para generar diferentes anillos dentro de la imagen con el mismo centro con el fin de simular el artificio de anillos concéntricos.

5.2.3. Endurecimiento del haz

Los valores RGB se convierten a escala de grises utilizando la fórmula NTSC:

$$GrayImage = 0,299R + 0,587G + 0,114B \quad (33)$$

Esta ecuación representa de cerca la percepción relativa de la persona promedio del brillo de la luz roja, verde y azul.

Posteriormente se utilizó el método de Otsu con el fin de convertir la imagen de escala de grises a binaria.

El método de Otsu calcula el valor umbral de forma que la dispersión dentro de cada segmento sea lo más pequeña posible, pero al mismo tiempo la dispersión sea lo más alta posible entre segmentos diferentes. Para ello se calcula el cociente entre ambas variancias y se busca un valor umbral para el que este cociente sea máximo.

Sea $p(g)$ la probabilidad de ocurrencia del valor de gris $0 < g < G$ (G es el valor de gris máximo). Entonces la probabilidad de ocurrencia de los píxeles en los dos segmentos es:

$$K_0 : P_0(t) = \sum_{g=0}^t p(g) \text{ y } K_1 : P_1(t) = \sum_{g=t+1}^G p(g) = 1 - P_0(t) \quad (34)$$

Una vez binarizada la imagen, se busca que los blancos sean atenuados con el fin de opacar las estructuras internas del cráneo. En este punto, se usó un umbral de 0,4 con el fin de detallar dichas estructuras.

Usando las 43 imágenes originales y, teniendo en cuenta que a cada una de ellas se les aplicó una transformación con el fin de simular los artificios, se obtuvieron en total 172 imágenes.

5.2.4. Extracción de características

Utilizando la teoría explicada en la sección 4.13 y, teniendo en cuenta el desarrollo de la Ecuación 23, se descartan los valores nulos de la matriz que se encuentre en el rango establecido.

Al aplicarlo en las 172 imágenes, se obtienen 172 matrices y finalmente se obtiene el valor singular de cada elemento pasando cada imagen por un método algebraico, que comprime la matriz que la compone. Con los datos obtenidos se alimenta un matriz general que almacena la resultante del SVD de cada imagen con el fin entrenar un algoritmo de Machine Learning en el cual se hará comparaciones inter-clase con máquinas de soporte vectorial y los vectores de clasificación binaria.

5.3. Aprendizaje de máquina

La implementación del algoritmo para desarrollar programas o solucionar problemas específicos, pueden dar como resultado patrones reconocibles o repetitivos dentro de la imagen, con los cuales se pueden predecir patrones o alguna clase de tarea, mejorando su desempeño. Para este caso se aplicará un enfoque de aprendizaje de máquina que permite seleccionar y determinar dentro de un banco de estudios de tomografía axial computada las imágenes que tengan algún tipo de artefacto y logre clasificarlas con respecto a la imagen original de manera autónoma como se explica en la sección 4.14. Por último, se utiliza un método de validación cruzada de k-folds cross validation con el fin de entrenar la máquina y encontrar los valores reales de la simulación de los artefactos respecto a la imagen de referencia.

6. Resultados

La Figura 25 muestra el resultado de aplicar la matriz de rotación a una imagen. En ella se puede observar el artefacto de movimiento del paciente el cual se hizo con 10°



Figura 25: Imagen escanografía normal de orbita, misma imagen con simulación de movimiento

Elaboración propia

Por otro lado, la Figura 26 muestra de izquierda a derecha una imagen normal de escáner cerebral, seguido de la simulación del artefacto de endurecimiento del haz del rayo incidente, es decir, cuando hay pérdida de contraste con respecto a la imagen original por

la absorción excesiva del haz del rayo por parte de las estructuras óseas del cráneo. Por último, a la derecha, se puede recrear artificios dobles y anillos concéntricos, la cual limita considerablemente su evaluación.

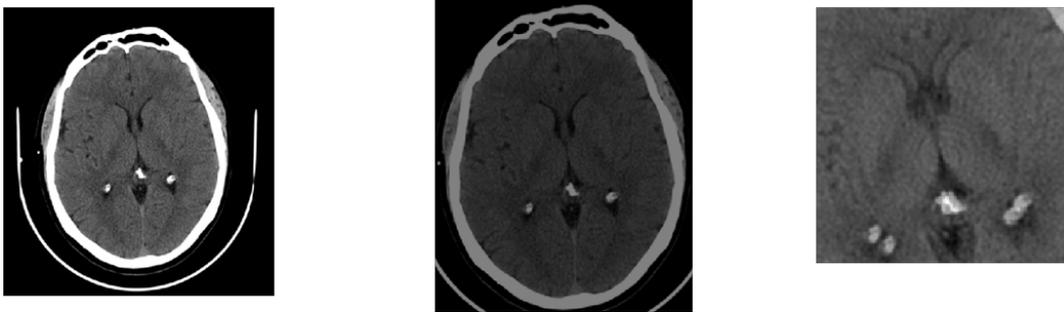


Figura 26: **Izquierda:** escáner normal cerebral, **Centro:** simulación de endurecimiento del haz incidente, **Derecha:** artificios dobles y anillos concéntricos de la imagen original

Elaboración propia

En la Figura 27, por medio de la curva ROC, se puede observar que el valor AUC (Area Under Curve) es de aproximadamente 0.78, lo que indica que este artefacto tiene un rango de error del 12% respecto a las imágenes originales. Este valor se obtuvo mediante 30 iteraciones del modelo, el cual puede variar en 0.06 entre iteraciones del mismo corte.

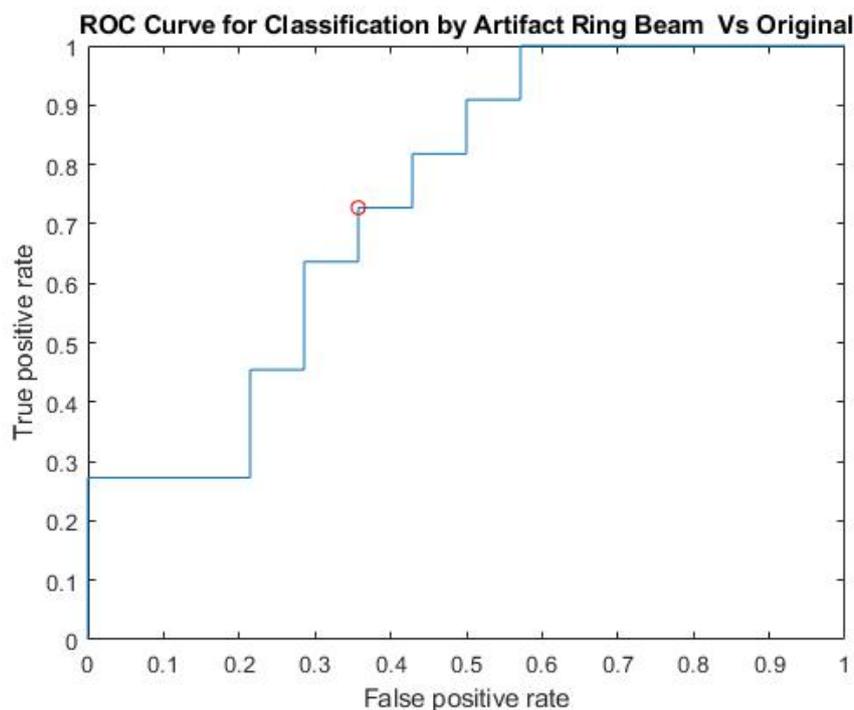


Figura 27: Curva ROC imagen original vs anillos concéntricos

Elaboración propia

Es importante mencionar que las muestras o clase deben ser del mismo tamaño matricial, el cual se asegura mediante el Singular Value Decomposition (SVD), aun así, las imágenes

corresponden a diferentes cortes y estructuras cerebrales, por lo que el Kernel es de tipo gaussiano.

El caso de la validación cruzada k-folds, entre las imágenes originales y las imágenes con artificios del endurecimiento haz el valor es de AUC 0,91 aproximadamente demostrando de nuevo que corresponde a un verdadero positivo, se pueden decir que las imágenes son compatibles como método de validación y clasificación. Éstas también se realizaron 30 iteraciones con una variación entre cada ejercicio 0,09 entre muestras. El resultado se observa en la Figura 28

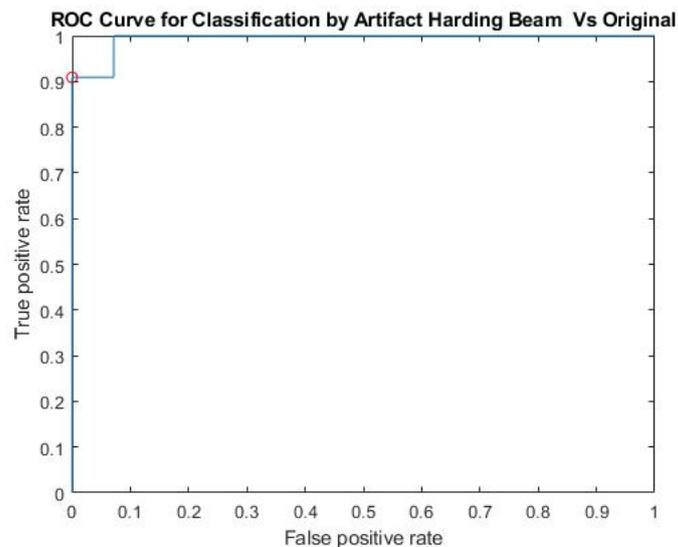


Figura 28: Curva ROC imagen original vs Artifact Harding Beam

Elaboración propia

En el último caso de estudio se obtuvo un valor de AUC de 0,63 (Figura 29) un poco bajo en comparación con los estudios previos, pero aun así se considera como verdadero positivo, y esto se debe por que la imagen con rotación, aunque mantenga el mismo tamaño matricial, los valores de cada pixel de composición varían dependiendo del grado de giro o rotación de imagen. El resultado varía entre 0,09 entre las muestras después de 30 iteraciones.

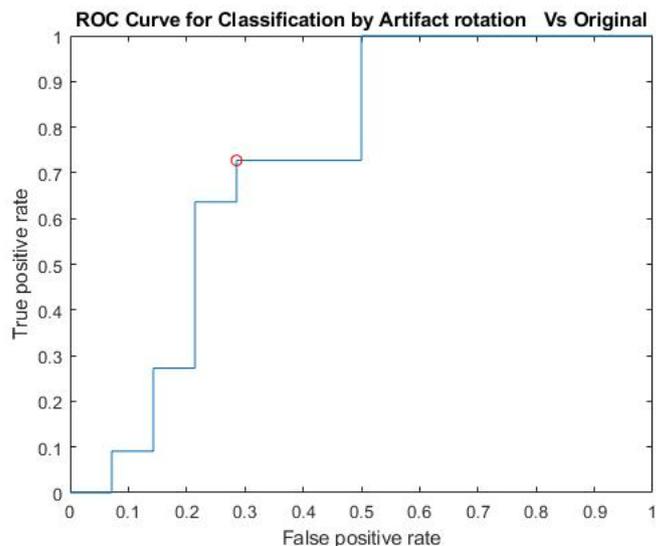


Figura 29: Curva ROC imagen original vs Artifact Rotation

Elaboración propia

Con cada uno de los valores obtenidos en las distintas muestras, validaciones y clasificaciones binarias entre las muestras de entrenamiento y las clases, se puede determinar que es posible programar un algoritmo que permita la identificación automática de la aparición de cualquier tipo de artefacto. De esto es la importancia el uso de machine learning en el proceso de reconstrucción de imágenes como método de aprendizaje y predicción de las mismas optimizando el proceso de obtención de imágenes en tomografía axial computada(TAC).

Como se puede observar en las Figuras 28, 27 y 29, la tendencia de las pruebas se ubica en el extremo superior izquierdo, lo que indica que posee una gran precisión de predicción con cada muestra, también podemos observar que el modelo es capaz de diferenciar imágenes normales de una con artefacto.

En caso individual de los artefactos podemos decir que el de mejor comportamiento en las pruebas fue el endurecimiento del haz del rayo incidente con un percentil del 83 % de eficacia, seguido del artefacto de anillos concéntricos con un 79 % y, por último, el artefacto de rotación con un 73 %. Esto se debe a la distorsión de la imagen original varía, según el artefacto siendo el endurecimiento del haz la que menos varía y la rotación la que más se distorsiona con respecto a la original, cabe recordar que la simulación de cada uno de los artefactos yace de un paquete de imágenes.

Al realizar diferentes pruebas los percentiles también pueden variar debido a la cantidad de iteraciones y por no se pueden clasificar linealmente, en este caso se emplean el Kernel de tipo polinómico o gaussiano. Aun así, se ha demostrado la fiabilidad del entrenamiento del algoritmo de aprendizaje automático para clasificación de imágenes con artefactos en tomografía axial computada.

El total de imágenes empleadas 172, tenemos grupos de 4 cada uno con 43 imágenes, para el caso de estudio se realizará a través de una matriz de confusión se hace una redistribución de las imágenes para determinar un estadio predictivo.

		PREDICCIÓN	
		0	1
REALIDAD	0	10	30
	1	12	120

Tabla 2: Matriz de confusión para el algoritmo de clasificación

Con estos valores podremos calcular la precisión del modelo de Machine Learning, en tareas de clasificación, a través de la siguiente fórmula:

$$\text{precisión} = \frac{TP}{(TP + FP)}$$

$$\text{precisión} = \frac{120}{(120 + 30)} = 0,8 \quad (35)$$

Donde TP es True Positive, FP es False Positive.

Es decir que el 80 % de las imágenes se reconocerá dentro de la imagen original o se deriva de ella.

En segunda medida de validación se calculará el Recall (Exhaustividad) se refiere a la capacidad de predicción del modelo de Machine Learning.

$$\text{Recall} = \frac{FN}{(TP + FN)}$$

$$\text{Recall} = \frac{120}{(120 + 12)} = 0,9 \quad (36)$$

Donde TP es True Positive, FN es False Negative.

Es decir que el modelo es capaz de reconocer el 90 % de las imágenes con arteificio y las imágenes normales.

Finalmente se calculará el F-Score o F1, para determinar el valor predictivo positivo, el rendimiento del modelo, con la siguiente ecuación:

$$\text{F-Score} = \frac{Pres * Recall}{(Pres + Recall) * 2}$$

$$\text{F-Score} = \frac{0,8 * 0,9}{(0,8 + 0,9) * 2} = 0,84 \quad (37)$$

Lo que indica que la calidad del modelo es de aproximadamente 84 % de fiabilidad, tomando en cuenta la totalidad de la muestra es decir las 172 imágenes, esto se puede evidenciar en las gráficas de cada curva ROC de los artificios frente a las imágenes originales donde cada puntuación es cercana a 1 como un verdadero positivo. Lo que procede a

continuación es realizar el mismo ejercicio, pero con cada uno de los artificios propuestos frente al set de imágenes originales para obtener la siguiente Tabla:

ARTIFACT vs ORIGINAL	PRECISION	RECALL	F-SCORE	AUC
HARDING BEAM	80 %	87 %	83 %	91 %
CONCENTRIC RING	71 %	90 %	79 %	88 %
ROTATION	67 %	82 %	73 %	63 %

Tabla 3: Resultados finales del algoritmo de clasificación con una comparación inter-clase entre los artefactos simulados y la imagen original.

Se toman los datos en cada uno de los casos y se evidencia que los porcentajes son relativamente consecuentes en comparación con los obtenidos a través del modelo clasificatorio de predicción propuesto en MATLAB, por otro lado, para cada artefacto, se puede concluir que el artefacto que más se asemeja a la imagen original es endurecimiento del haz incidente, puesto que la imagen original se mantiene pero la intensidad de la escala de grises se ve afectada mostrando sobre exposición en las estructuras cerebrales en consecuencia son poco definidas. El segundo artefacto con mayor adherencia con la imagen original es la de anillos concéntricos, la cual conserva el formato original pero la distorsión por sobreposición se evidencia en las estructuras cerebrales. Por último, las imágenes con artefacto de rotación, son las que más pierden similitud con las imágenes originales, donde se limita totalmente la evaluación de cualquier estructura cerebral.

7. Discusión de resultados

Con los métodos algebraicos se obtienen claramente una reducción considerable de todo tipo de ruido, artificios y artefactos, mejorando la calidad de imagen, otra cualidad de éste método es que no es necesario todas las proyecciones convencionales de un estudio rutinario para completar una reconstrucción, esto además implica una gran reducción en las dosis de exposición por estudio. Por el momento éste método requiere una arquitectura computacional muy específica, por ejemplo, al utilizar algoritmos iterativos se recalculan matrices en todas las direcciones posibles obteniendo nuevos sinogramas, en otros métodos estadísticos se realizan correcciones en la geometría del haz de rayo incidente proceso que también acarrea mayor esfuerzo computacional y por puesto tiene un alto costo de GPU. Por lo anterior podemos concluir:

- Imágenes de alto contraste y calidad superior.
- Requiere menos datos de proyecciones para la reconstrucción de imágenes.
- Reducción considerable en la dosis de exposición.
- Mayor tiempo de reconstrucción.
- Altos costos computacionales.

Actualmente se está trabajando en arquitecturas híbridas que contengan ambos métodos de reconstrucción como algoritmos paralelos, que permiten desarrollar mecanismos de

reconstrucción más eficientes, aprovechando las cualidades de ambos sistemas. Como es sabido a mayor resolución de imagen, mayor es el tamaño de la matriz inicial y mayor cantidad de ecuaciones por píxel, lo que equivale al número de detectores del tomógrafo. También se está trabajando con los algoritmos paralelos y la implementación de técnicas de filtrado como, filtros gaussianos, filtros de mediana, filtro Wiener, filtro bilateral, con el fin de ser más eficientes en la adquisición y tratamiento de la señal en los sinogramas producto de los métodos iterativos de reconstrucción.

Como ya hemos detallado existen varias formas de “limpiar” una imagen eficientemente con los métodos estadísticos independientemente de su naturaleza, sin embargo, requiere procesos complejos de adaptación a los sistemas actuales de hardware, por lo cual se plantea la posibilidad de trabajar con los sistemas GPU, Unidad de Procesamiento Gráfico, específico que acelere el procesamiento de datos obtenidos a través de los métodos iterativos, trabajar de lleno en nuevos algoritmos y lograr reducir al máximo todos los artificios que limitan una adecuada interpretación de imágenes, también se busca una corrección de las proyecciones en el momento que el paciente voluntaria e involuntariamente haga movimientos, de los cuales se pueden atenuar modificando las proyecciones, haciendo un desplazamiento en las matrices y poder realizar una corrección geométrica de los datos e implementar un proceso iterativo sobre la nueva matriz con el fin de recrear una nueva imagen sin los datos de las proyecciones afectadas por los movimientos, además su pueden utilizar para disminuir el ruido y los artificios a la hora de la reconstrucción de imágenes. Esto es posible con una de las virtudes de los métodos estadísticos, en los que no requieren un gran número de proyecciones y de datos para realizar posteriormente la reconstrucción.

Los ruidos y artificios en las imágenes no solo son de origen externo, como se ha mencionado, en situaciones de arcos de voltaje, falta de calibración de los instrumentos, desalineación de los detectores, entre otros, en general a través de algoritmos combinados analíticos y matemáticos se evidencia el mejoramiento en la calidad de imagen.

8. Conclusiones

A partir de cualquier imagen escanográfica se podrá simular cualquier artificio escogido para el estudio, haciendo similitud a una imagen médica real, donde se comprueba la limitación de la visualización de estructuras esenciales para un diagnóstico. Como método experimental a través de MATLAB se logró simular los artificios seleccionados como los más frecuentes en TAC, sin variar la dimensionalidad de la matriz de origen.

Fue posible simular artificios comunes en imágenes de tomografía basado en las propiedades algebraicas de cada matriz, las cuales se pueden operar a través de matrices de transformación y otras operaciones matriciales.

En imágenes médicas los métodos de clasificación no son lineales, por las características propias de cada matriz que compone la imagen, es decir cuando tenemos como referencia de entrenamiento a las imágenes normales y de verificación a las imágenes con algún artificio no es posible una solución lineal, además el tipo de características de las imágenes no permite colocarlas en un plano normal para su clasificación, requiere un Kernel de tipo polinómico o gaussiano para solucionarlo y representarlo a través de un hiperplano.

El Kernel Gaussiano permite que las características extraídas de las imágenes simuladas

con artefactos sean coherentes con el espacio definido para la clasificación binaria, es decir que dentro el grupo de clasificación tendemos dos posibles etiquetas entre 0 y 1 lo que nos permite definir si son positivos o negativos.

En este trabajo podemos evidenciar en el resultado dentro esta clasificación binaria que tan verdaderos positivos o que tan falsos positivo se comportan dentro de la muestra. Lo que nos permite hacer una correlación con las imágenes originales y las imágenes con algún tipo de artefacto, esto es útil para el aprendizaje de máquina aplicado a un equipo de Tomografía Axial Computada, para que de manera automática el software del equipo dentro de sus rutinas de reconstrucción de imágenes pueda identificar la aparición de dichos artefactos con el fin de realizar la corrección pertinente y mitigar o eliminar la distorsión de la imagen afectada.

K-folds se ajusta mejor a los datos de clasificación de la máquina de soporte vectorial (SVM) permitiendo así que la validación del modelo tenga un área bajo la curva (ROC) esperada. Para finalizar el proceso de entrenamiento se realiza la validación cruzada (*K-folds*) para evaluar el rendimiento del estimador con el propósito de ver la eficiencia de predicción del algoritmo empleado, esto se logra con un determinado número de iteraciones para reentrenar el modelo.

El artefacto de endurecimiento del haz fue el que más corrompió la imagen permitiendo así que su clasificación tuviera una alta sensibilidad, lo cual indica que el umbral definido en el algoritmo de binarización es crítico para la perturbación de la imagen.

Referencias

- [1] A. López Díaz, “Fundamentos matemáticos de los métodos kernel para aprendizaje supervisado,” 2018.
- [2] G. A. Betancourt, “Las máquinas de soporte vectorial (svms),” *Scientia et technica*, vol. 1, no. 27, 2005.
- [3] J. Radon, “On the determination of functions from their integrals along certain manifolds,” *Ber. Verh. Sachs Akad Wiss.*, vol. 69, pp. 262–277, 1917.
- [4] S. G. Uribarri, “Principios matemáticos de la reconstrucción de imágenes tomográficas,” *CIENCIA ergo-sum*, vol. 10, no. 3, pp. 271–281, 2003.
- [5] P. Sartori, M. Rozowykniat, L. Siviero, G. Barba, A. Peña, N. Mayol, D. Acosta, J. Castro, and A. Ortiz, “Artefactos y artificios frecuentes en tomografía computada y resonancia magnética,” *Revista argentina de radiología*, vol. 79, no. 4, pp. 192–204, 2015.
- [6] J. Yang, X. Zhen, L. Zhou, S. Zhang, Z. Wang, L. Zhu, and W. Lu, “Geometric correction for cone-beam ct reconstruction and artifacts reduction,” in *2008 2nd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering*, pp. 2386–2389, IEEE, 2008.
- [7] R. Spin-Neto, J. Mudrak, L. Matzen, J. Christensen, E. Gotfredsen, and A. Wenzel, “Cone beam ct image artefacts related to head motion simulated by a robot skull: visual characteristics and impact on image quality,” *Dentomaxillofacial Radiology*, vol. 42, no. 2, p. 32310645, 2013.
- [8] J. Wicklein, H. Kunze, W. A. Kalender, and Y. Kyriakou, “Image features for misalignment correction in medical flat-detector ct,” *Medical physics*, vol. 39, no. 8, pp. 4918–4931, 2012.
- [9] C. de Salud *et al.*, “Junta de andalucía,” *Tercer plan andaluz de salud*, vol. 2008, p. 2, 2003.
- [10] J. C. Ramírez Giraldo, C. Arboleda Clavijo, and C. H. McCollough, “Tomografía computarizada por rayos x: fundamentos y actualidad,” *Revista Ingeniería Biomédica*, vol. 2, no. 4, pp. 54–66, 2008.
- [11] C. N. Bouza-Herrera, “Las curvas roc teoría y herramientas para su uso,”
- [12] “Microsoft word - c___documents and settings__t__desktop__publicaciones__publicaciones terminadas para ccoo__equipo de tomografi.” <https://www.feandalucia.ccoo.es/docu/p5sd6375.pdf>. (Accessed on 06/22/2022).
- [13] J. L. F. Marrón, J. A. Primicia, and J. Barcala, *Desarrollo de algoritmos de reconstrucción de imágenes en tomografía de capacitancia eléctrica*. Ciemat, 2007.
- [14] J. J. Martínez Fernández de las Heras *et al.*, “La descomposición en valores singulares (svd) y algunas de sus aplicaciones,” *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 8, no. 3, pp. 796–810, 2005.

- [15] R. L. Siddon, “Prism representation: a 3d ray-tracing algorithm for radiotherapy applications,” *Physics in Medicine & Biology*, vol. 30, no. 8, p. 817, 1985.
- [16] M. T. C. Mora Mora, *Métodos de reconstrucción volumétrica algebraica de imágenes tomográficas. Aplicación a un TAC de pequeños animales ya un simulador-TAC*. PhD thesis, Universitat Politècnica de València, 2008.
- [17] L. J. Sandoval Serrano *et al.*, “Algoritmos de aprendizaje automático para análisis y predicción de datos,” *Revista Tecnológica*; no. 11, 2018.
- [18] A. M. Vázquez, “Introducción a machine learning,” 2018.
- [19] J. Reséndiz, “Las máquinas de vectores de soporte para identificación en línea,” *internet*]. Disponible en <https://www.ctrl.cinvestav.mx/~yww/pdf/MaTesJAR.pdf>, 2006.
- [20] P. A. Aguirre, *Estudio de técnicas de machine learning aplicadas a la clasificación de cultivo en imágenes satelitales*. PhD thesis, Universidad Nacional de Cuyo, 2019.
- [21] S. Van Vaerenbergh and I. Santamaría, “Métodos kernel para clasificación,” *GTAS, Universidad de Cantabria*, 2018.
- [22] L. Pérez Planells, J. Delegido Gómez, J. P. Rivera-Caicedo, and J. Verrelst, “Análisis de métodos de validación cruzada para la obtención robusta de parámetros biofísicos,” *Revista Española de Teledetección*, 2015, vol. 44, p. 55-65, 2015.
- [23] T.-T. Wong, “Performance evaluation of classification algorithms by k-fold and leave-one-out cross validation,” *Pattern Recognition*, vol. 48, no. 9, pp. 2839–2846, 2015.
- [24] A. R. d. Valle Benavides, “Curvas roc (receiver-operating-characteristic) y sus aplicaciones,” 2017.